

DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

Метод стереографической проекции в задачах ориентации подвижного объекта

В.В. Матвеев, А.Н. Хомячкова, А.В. Каликанов, Д.С. Стрельцов

Тульский государственный университет,
пр-т Ленина, 92, г. Тула 300012, Россия

Поступила 28.05.2025

Принята к печати 15.09.2025

Исследование новых кинематических параметров для бесплатформенных систем ориентации является актуальной задачей, поскольку позволяет повысить точность и надёжность определения ориентации объекта в условиях сложного движения и воздействия внешних факторов. Традиционные кинематические параметры, такие как углы Эйлера, имеют известные ограничения, например, проблема "блокировки осей", в то время как новые подходы к описанию вращений объекта могут обеспечить более эффективное определение ориентации объекта. Целью работы являлся анализ и оценка применимости параметров (w, z) в алгоритмах бесплатформенных систем ориентации, а также разработка и исследование новой схемы комплексирования гироскопических и акселерометрических измерений с интеграцией данных по параметру w . Кинематические параметры (w, z) , сравнительно недавно введены в теорию конечного поворота. Они задают положение и ориентацию объекта вокруг неподвижной точки через два последовательных конечных поворота. Один из этих поворотов (угол z) характеризует вращение объекта вокруг одной из осей неподвижной системы координат. Второй поворот описывается с помощью стереографической проекции оси подвижного объекта на комплексную плоскость $w = u + jv$. Это позволяет представить вращение объекта в виде точки на этой плоскости. Приводятся кинематические уравнения относительно параметров (w, z) . Показана эффективность применения параметров (w, z) применительно к гироскопическим бесплатформенным системам ориентации. Показано, что кинематические уравнения относительно аргументов функции $w(u, v)$ могут быть проинтегрированы независимо от угла z , а общий третий порядок системы на единицу ниже, чем кинематические уравнения в кватернионах. Проведены численные эксперименты по интегрированию кинематических уравнений при условии постоянного вращения объекта с заданной угловой скоростью рыскания и гармоническими колебаниями по углам тангажа и крена. Результаты моделирования иллюстрируются в функциях времени, на сфере Римана и на комплексной плоскости. Даются соотношения, позволяющие вычислить аргументы функции $w(u, v)$ с помощью акселерометров. Иллюстрируются стереографические проекции параметров, полученных на основе измерений гироскопов и акселерометров, содержащих инструментальные погрешности. Приведена схема комплексирования гироскопических и акселерометрических данных, которая отличается от традиционных методов тем, что интеграция осуществляется не по углам тангажа и крена, а по аргументам функции w .

Ключевые слова: параметры (w, z) , система ориентации, гироскоп, акселерометр, комплексирование

Адрес для переписки:

Матвеев В.В.
Тульский государственный университет,
пр-т Ленина, 92, г. Тула 300012, Россия
e-mail: matweew.valery@yandex.ru

Address for correspondence:

Matveev V.V.
Tula State University,
Lenina Ave., 92, Tula 300012, Russia
e-mail: matweew.valery@yandex.ru

Для цитирования:

В.В. Матвеев, А.Н. Хомячкова, А.В. Каликанов, Д.С. Стрельцов.
Метод стереографической проекции в задачах ориентации
подвижного объекта.
Приборы и методы измерений.
2025. Т. 16. № 3. С. 202–211.
DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

For citation:

Matveev VV, Khomyachkova AN, Kalikanov AV, Streltsov DS.
Stereographic Projection Method in Problems of Orientation
of a Moving Object.
Devices and Methods of Measurements.
2025;16(3):202–211. (In Russ.).
DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

Stereographic Projection Method in Problems of Orientation of a Moving Object

V.V. Matveev, A.N. Khomyachkova, A.V. Kalikanov, D.S. Streltsov

Tula State University
Lenin Ave., 92, Tula 300012, Russia

Received 28.05.2025
Accepted for publication 15.09.2025

Abstract

Study of new kinematic parameters for strapdown orientation systems is a relevant task, since it allows increasing the accuracy and reliability of the object orientation determining under conditions of complex motion and an influence of external factors. Traditional kinematic parameters, such as Euler angles, have known limitations, for example, the problem of "gimbal lock", while new approaches to describing object rotations can provide more efficient determination of the object orientation. The aim of the work was to analyze and evaluate the applicability of the parameters (w, z) in the algorithms of strapdown orientation systems, as well as to develop and study a new scheme for combining gyroscopic and accelerometric measurements with data integration by the parameter w . Kinematic parameters (w, z) were relatively recently introduced into the theory of finite rotation, which specify the position and orientation of an object around a fixed point through two successive finite rotations. One of these rotations (angle z) characterizes the rotation of the object around one of the axes of the fixed coordinate system. The second rotation is described using a stereographic projection of the axis of the moving object onto the complex plane $w = u + jv$. This allows us to represent the orientation of the object as a point on this plane. Kinematic equations for the parameters (w, z) are given. Efficiency of parameters (w, z) using is shown as applied to gyroscopic strapdown orientation systems. It is shown that the kinematic equations for the function (w, z) arguments can be integrated independently of the angle z , and the general third order of the system is one unit lower than the kinematic equations in quaternions. Numerical experiments on integration of kinematic equations under the condition of constant rotation of the object with a given angular velocity of yaw and harmonic oscillations in pitch and roll angles are carried out. The modeling results are illustrated in functions of time, on the Riemann sphere and on the complex plane.

Relationships are given that allow calculation of the function $w(u, v)$ arguments using accelerometers. Stereographic projections of parameters obtained on the basis of measurements of gyroscopes and accelerometers containing instrumental errors are illustrated. A scheme for integrating gyroscopic and accelerometric data is given. This scheme differs from traditional methods because integration is performed not by pitch and roll angles but using arguments of the function w .

Keywords: : parameters (w, z) , attitude control system, gyroscope, accelerometer, integration

Адрес для переписки:
Матвеев В.В.
Тульский государственный университет,
пр-т Ленина, 92, г. Тула 300012, Россия
e-mail: matweew.valery@yandex.ru

Address for correspondence:
Matveev V.V.
Tula State University,
Lenina Ave., 92, Tula 300012, Russia
e-mail: matweew.valery@yandex.ru

Для цитирования:
В.В. Матвеев, А.Н. Хомячкова, А.В. Каликанов, Д.С. Стрельцов.
Метод стереографической проекции в задачах ориентации подвижного объекта.
Приборы и методы измерений.
2025. Т. 16. № 3. С. 202–211.
DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

For citation:
Matveev VV, Khomyachkova AN, Kalikanov AV, Streltsov DS.
Stereographic Projection Method in Problems of Orientation of a Moving Object.
Devices and Methods of Measurements.
2025;16(3):202–211. (In Russ.).
DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-3-202-211

Введение

Определение ориентации подвижного объекта относительно его центра масс относится к решению задачи механики о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Для решения этой задачи используются различные кинематические параметры, в частности, классические углы Эйлера [1] и их модификации (углы Эйлера–Крылова), направляющие косинусы [2], кватернионы, параметры Родрига–Гамильтона и др. [3–5].

С математической точки зрения, перечисленные кинематические параметры дают одинаковые результаты при описании ориентации твёрдого тела, однако выбор конкретного параметра определяется, в первую очередь, вычислительной эффективностью при реализации численных алгоритмов. В частности, углы Эйлера (Эйлера–Крылова) подвержены эффекту «gimbal lock» [6], или блокировке оси, что приводит к потере степени свободы и возникновению сингулярностей, затрудняющих вычисление ориентации объекта и приводящих к непредсказуемому поведению системы.

Уравнение Пуассона, использующее направляющие косинусы, лишено указанного недостатка, но имеет высокий порядок (девятый), что усложняет его решение. В отличие от направляющих косинусов, кватернионы достаточно эффективны для решения задач ориентации, так как имеют меньший порядок кинематического уравнения (четвёртый) и также позволяют избежать эффекта блокировки осей.

Одним из подходов к определению углового положения твёрдого тела является использование стереографической проекции и дробно-рациональных функций комплексного переменного $w = w(u, v)$. Однако, несмотря на наличие исследований, использующих данную функцию [7], описание ориентации посредством w остаётся неполным, поскольку позволяет определить положение лишь одной из осей твёрдого тела, не обеспечивая восстановления полной ориентации.

Для задания полной ориентации тела совместно с функцией w вводится угол z , характеризующий начальное вращение вокруг одной из осей неподвижной системы координат. Параметры (w, z) , впервые предложены в работе [8] для описания тела с одной неподвижной

точкой. Их удобно применять для ориентации осесимметричных вращающихся объектов, такие как, например, космические аппараты [9].

Настоящее исследование посвящено анализу параметров (w, z) с точки зрения их применимости в бесплатформенных системах ориентации подвижных объектов. В таких системах задача определения ориентации решается на основе измерений угловых скоростей, получаемых от гироскопических датчиков, с последующей численной обработкой этих данных. Кроме того, в работе рассматривается новая схема комплексирования гироскопических и акселерометрических измерений, в которой интеграция осуществляется по аргументам функции w .

Описание ориентации двумя конечными поворотами

Рассмотрим решение задачи ориентации с помощью параметров (w, z) . Для этого введём неподвижную систему координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ и систему координат $O\xi^b\eta^b\zeta^b$, связанную с подвижным объектом. В отличие от трёх углов Эйлера–Крылова результирующее положение тела задаётся двумя вращениями на углы z и θ .

Следуя работе [8] первый поворот связанной с объектом системы координат выполняется вокруг вертикальной оси $O\zeta_0$ на угол z (рисунок 1). В результате этого поворота связанная система координат займёт некоторое промежуточное положение $O\xi'\eta'\zeta'$.

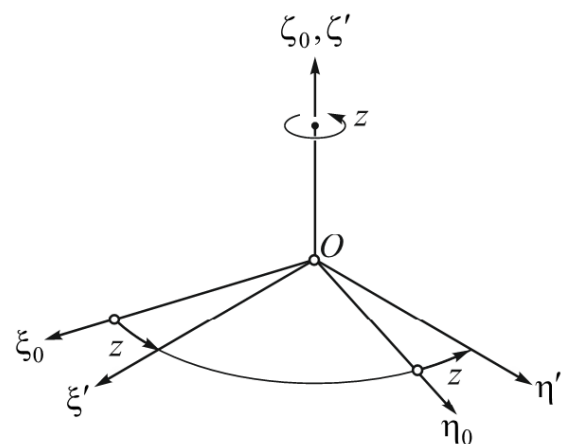


Рисунок 1 – Конечный поворот связанной с объектом системы координат на угол z

Figure 1 – Finite rotation of the body frame coordinate system by angle z

Матрица направляющих косинусов, соответствующая данному конечному повороту, имеет вид:

$$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ -\sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Второй поворот на угол θ , характеризующий результирующее положение связанной с объектом системы координат $O\xi^b\eta^b\zeta^b$, определяется вращением вокруг оси, заданной единичным вектором $\mathbf{e}$ (рисунок 2), лежащим в плоскости $O\xi'\eta'$. Направление вектора $\mathbf{e}$ определяется так:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{k}^b}{|\mathbf{k}' \times \mathbf{k}^b|}, \quad (2)$$

где $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}^b$ орты координатных осей $O\xi'$ и $O\xi^b$ соответственно.

Найдём компоненты вектора $\mathbf{e}$, для этого обозначим направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{k}^b$ (оси $O\xi^b$) в системе $O\xi'\eta'\zeta'$ следующим образом: $a' = \cos(\mathbf{k}^b, \xi')$, $b' = \cos(\mathbf{k}^b, \eta')$, $c' = \cos(\mathbf{k}^b, \zeta')$. Так как $|\mathbf{k}^b| = 1$, то величины a' , b' , c' также являются проекциями вектора $\mathbf{k}^b$ на оси системы координат $O\xi'\eta'\zeta'$.

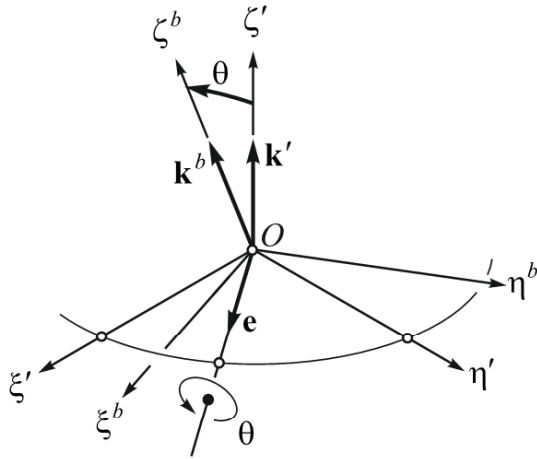


Рисунок 2 – Второй конечный поворот на угол θ , при котором подвижный объект занимает результирующее положение $O\xi^b\eta^b\zeta^b$

Figure 2 – The second finite rotation at an angle θ at which the moving object occupies the resulting position $O\xi^b\eta^b\zeta^b$

С учётом введённых обозначений и соотношения (2) получаем искомые компоненты:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \begin{pmatrix} b' & -a' & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (3)$$

Получим теперь матрицу направляющих косинусов второго поворота. Известно, что матрица направляющих косинусов, выраженная через направляющие косинусы оси конечного поворота и угол конечного поворота, имеет вид [10]:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{E} - \sin(\theta)[\mathbf{e}\times] + (1 - \cos \theta)[\mathbf{e}\times]^2, \quad (4)$$

$$\text{где } [\mathbf{e}\times] = \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix} - \text{кососимметрическая матрица; } \mathbf{E} - \text{единичная матрица размера } 3 \times 3.$$

Так как $\cos \theta = c'$, $\sin \theta = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, то матрицу направляющих косинусов второго конечного поворота можно представить в виде:

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} c' + \frac{b'^2}{1+c'} & -\frac{a'b'}{1+c'} & a' \\ -\frac{a'b'}{1+c'} & c' + \frac{a'^2}{1+c'} & b' \\ -a' & -b' & c' \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Детерминант матрицы $\mathbf{A}(\theta)$ определяется следующим образом:

$$|\mathbf{A}(\theta)| = \frac{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + c')}{c' + 1}. \quad (6)$$

Так как направляющие косинусы связаны соотношением $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, то $|\mathbf{A}(\theta)| = 1$, что отражает свойство ортогональности матрицы направляющих косинусов.

В итоге результирующее положение тела объекта задаётся матрицей направляющих косинусов:

$$\mathbf{A}(\theta, z) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} c'Cz + \frac{b'Cz + a'b'Sz}{1+c'} & c'Sz + \frac{b'^2Sz - a'b'Cz}{1+c'} & a' \\ -c'Sz - \frac{a'^2Sz + a'b'Cz}{1+c'} & c'Cz + \frac{a'^2Cz - a'b'Sz}{1+c'} & b' \\ b'Sz - a'Cz & -b'Cz - a'Sz & c' \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $Cz = \cos z$; $Sz = \sin z$.

Таким образом, матрица $\mathbf{A}(\theta, z)$, в отличие от классического подхода с использованием трёх углов Эйлера, описывает ориентацию объекта посредством двух конечных поворотов.

Можно показать, что матрица (7) также является ортогональной и может быть найдена из решения уравнения Пуассона [2]:

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\dot{\mathbf{E}}^b \times] \mathbf{A}, \quad (8)$$

где $[\omega^b \times]$ – кососимметрическая матрица, составленная из проекций вектора абсолютной угловой скорости связанной системы координат $\omega_\xi^b, \omega_\eta^b, \omega_\zeta^b$:

$$\dot{\mathbf{E}}^b = \omega_\xi^b \mathbf{i}^b + \omega_\eta^b \mathbf{j}^b + \omega_\zeta^b \mathbf{k}^b. \quad (9)$$

Существенно, что если рассмотреть третий столбец матрицы направляющих косинусов (7), то из уравнения (8) следует:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}' \\ \dot{b}' \\ \dot{c}' \end{bmatrix} = -[\dot{\mathbf{E}}^b \times] \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \quad (10)$$

т. е. проекции вектора $\mathbf{k}^b$ могут быть найдены без учёта вращения на угол z .

В этом случае ориентация вектора $\mathbf{k}^b$, а, следовательно, положение одной из осей твёрдого тела, может быть определена без учёта первоначального поворота вокруг вертикальной оси.

Описание ориентации тела с помощью стереографической проекции

Зададим матрицу второго конечного поворота (5) с помощью стереографической проекции [11]. Концу вектора $\mathbf{k}^b$, заданному в системе координат $O\xi'\eta'\zeta'$ тройкой чисел a', b', c' , поставим в соответствие точку $w = u + jv$ ($j = \sqrt{-1}$) плоскости $O\xi'\eta'$ посредством следующего геометрического построения (рисунок 3). Из точки S , расположенной на отрицательном направлении оси $O\xi'$ на расстоянии, равном единице от начала координат, проведём через конец вектора $\mathbf{k}^b$ луч. Этот луч пересечёт плоскость в точке $w(u, v)$, которая является стереографической проекцией из полюса S конца вектора $\mathbf{k}^b$ сферы Римана.

Используя простейшие геометрические построения (рисунок 3), нетрудно получить соотношения для координат точки w :

$$u = \frac{a'}{1+c'}, \quad v = \frac{b'}{1+c'}. \quad (11)$$

Или в компактной форме:

$$w = u + jv = \frac{a' + jb'}{1+c'}. \quad (12)$$

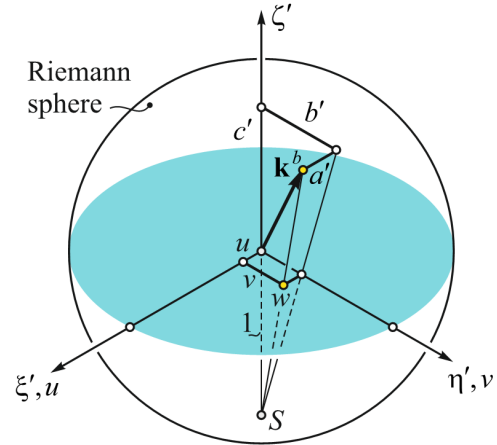


Рисунок 3 – Представление конца вектора $\mathbf{k}^b$ стереографической проекцией

Figure 3 – Representation of the end of a vector $\mathbf{k}^b$ by a stereographic projection

Комплексное число w полностью определяет координаты вектора $\mathbf{k}^b$ на сфере. Обратный пересчёт точки комплексной плоскости в точку сферы определяется так:

$$a' = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad b' = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad c' = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}. \quad (13)$$

Подставляя соотношения (13) в матрицу (5), имеем:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}(w) = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{bmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv & 2u \\ -2uv & 1+u^2-v^2 & 2v \\ -2u & -2v & 1-u^2-v^2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Исходя из этого, матрица $\mathbf{A}(\theta)$ выражена через координаты точки w на комплексной плоскости. Результирующая матрица направляющих косинусов определяется так:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(w)\mathbf{A}(z) = \frac{1}{1+|w|^2} \begin{bmatrix} (1-u^2+v^2)Cz + 2uvSz & (1-u^2+v^2)Sz - 2uvCz & 2u \\ -(1+u^2-v^2)Sz - 2uvCz & (1+u^2-v^2)Cz - 2uvSz & 2v \\ 2vSz - 2uCz & -2uSz - 2vCz & 1-u^2-v^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $|w|^2 = u^2 + v^2$.

В результате ориентация тела объекта может быть задана тремя параметрами: координатами точки w : $u = \text{Re } w, v = \text{Im } w$ и углом поворота z .

Кинематическое уравнение для параметров (w, z)

Составим кинематические уравнения, позволяющие определить параметры (w, z)

по угловым скоростям подвижного объекта $\omega_{\xi}^b, \omega_{\eta}^b, \omega_{\zeta}^b$. Продифференцируя соотношение (12) по времени, получим:

$$\dot{w} = \frac{\dot{a}' + j\dot{b}' - w\dot{c}'}{1 + c'} \quad (16)$$

Подставляя в (16) проекции угловых скоростей из уравнения (10), получим:

$$\dot{w} = -j(\omega_{\xi} w - \frac{1}{2}\omega + \frac{\bar{\omega}}{2}w^2), \quad (17)$$

где $\omega = \omega_{\xi}^b + j\omega_{\eta}^b, \omega_{\zeta}^b; \bar{\omega} = \omega_{\xi}^b - j\omega_{\eta}^b$.

Отделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\dot{u} = v\omega_{\xi}^b + uv\omega_{\xi}^b - \frac{1}{2}\omega_{\eta}^b(1 + u^2 - v^2); \quad (18)$$

$$\dot{v} = -u\omega_{\xi}^b - uv\omega_{\eta}^b + \frac{1}{2}\omega_{\xi}^b(1 - u^2 + v^2). \quad (19)$$

Существенно, что уравнения (18) и (19) не зависят от угла z и могут быть проинтегрированы изолированно. Кроме того, стереографическая проекция позволяет понизить порядок кинематических уравнений с третьего (уравнения (10)) до второго порядка.

На основании анализа следа матрицы в уравнении Пуассона (8) может быть найдено кинематическое уравнение относительно угла z [8]:

$$\dot{z} = \omega_{\xi}^b + u\omega_{\xi}^b + v\omega_{\eta}^b. \quad (20)$$

Таким образом, полная система кинематических уравнения относительно параметров (w, z) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = v\omega_{\xi}^b + uv\omega_{\xi}^b - \frac{1}{2}\omega_{\eta}^b(1 + u^2 - v^2), \\ \dot{v} = -u\omega_{\xi}^b - uv\omega_{\eta}^b + \frac{1}{2}\omega_{\xi}^b(1 - u^2 + v^2), \\ \dot{z} = \omega_{\xi}^b + u\omega_{\xi}^b + v\omega_{\eta}^b. \end{cases} \quad (21)$$

Отметим свойства кинематических уравнений (21). Порядок системы (21) соответствует числу вращательных степеней свободы твёрдого тела и на единицу меньше кинематических уравнений в кватернионах. Уравнения (21) определены для любых значений параметров (w, z) , т. е. не имеют эффекта блокировки осей. Первые два уравнения относительно u и v могут быть проинтегрированы независимо от третьего уравнения и имеют наглядную геометрическую интерпретацию с помощью стереографической

проекции, что позволяет анализировать вращательные движения оси тела $O\zeta^b$ на комплексной плоскости.

При реализации бесплатформенных систем ориентации требуется определять углы рыскания, тангажа и крена. Так как матрица направляющих косинусов, выраженная через углы рыскания Ψ , тангажа ϑ и крена γ , имеет вид [12]:

$$A(\psi, \vartheta, \gamma) = \begin{bmatrix} C\gamma C\psi - S\gamma S\psi S\vartheta & C\gamma S\psi + S\gamma C\psi S\vartheta & -S\gamma C\vartheta \\ -C\vartheta S\psi & C\psi C\vartheta & S\vartheta \\ S\gamma C\psi + C\gamma S\psi S\vartheta & S\gamma S\psi - C\gamma C\psi S\vartheta & C\gamma C\vartheta \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где $C = \cos()$, $S = \sin()$ – тригонометрические функции синуса и косинуса соответствующего угла, то из сравнения (22) и (15) получим:

$$\psi = \arctg \frac{(1 + u^2 - v^2)Sz + 2uvCz}{(1 + u^2 - v^2)Cz - 2uvSz}, \quad (23)$$

$$\vartheta = \arcsin \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad (24)$$

$$\gamma = \arctg \frac{-2u}{1 - u^2 - v^2}. \quad (25)$$

Существенно, что углы тангажа ϑ и крена γ определяются только параметрами u, v .

Моделирование системы ориентации

Численное интегрирование системы уравнений (21) выполнялось при задании углов рыскания, тангажа и крена подвижного объекта в соответствии со следующими зависимостями:

$$\psi = \omega_{\psi} t, \vartheta = A_{\vartheta} \cos \omega_{\vartheta} t, \gamma = A_{\gamma} \sin \omega_{\gamma} t.$$

Проекция вектора абсолютной угловой скорости подвижного объекта описывались так:

$$\omega_{\xi}^b = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma,$$

$$\omega_{\eta}^b = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta,$$

$$\omega_{\zeta}^b = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma.$$

Начальные значения функции w задавались на основе соотношений:

$$u_0 = \frac{-\sin \gamma_0 \cos \vartheta_0}{1 + \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0}, v_0 = \frac{\sin \vartheta_0}{1 + \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0}. \quad (26)$$

При этом начальный угол z_0 принимался нулевым. Результаты моделирования для значений параметров $A_{\vartheta} = 25^\circ, A_{\gamma} = 30^\circ, \omega_{\psi} = 1^\circ/\text{с}, \omega_{\vartheta} = \omega_{\gamma} = 2\pi \cdot 0.05 \text{ рад/с}$ приведены на рисунках 4, 5.

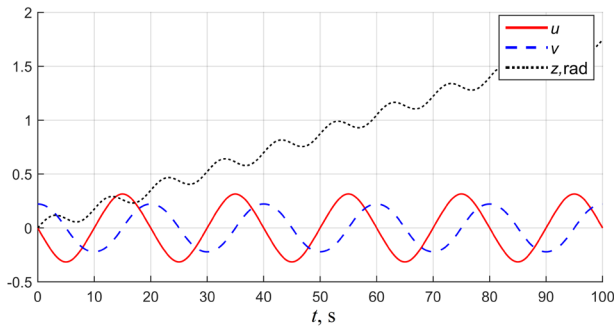


Рисунок 4 – Графики зависимости параметров ориентации u , v , z от времени

Figure 4 – Graphs of the orientation parameters u , v , z dependence on time

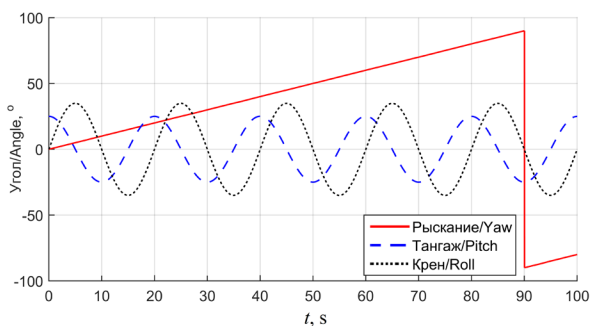


Рисунок 5 – Графики зависимости углов рыскания, тангажа и крена, полученные по соотношениям (23)–(25) от времени

Figure 5 – Graphs of the yaw, pitch and roll angles obtained from relations (23)–(25) dependence on time

Пространственное движение вектора $\mathbf{k}^b$ в системе координат $O\xi'\eta'\zeta'$, его стереографическая проекция и сфера Римана показаны на рисунке 6.

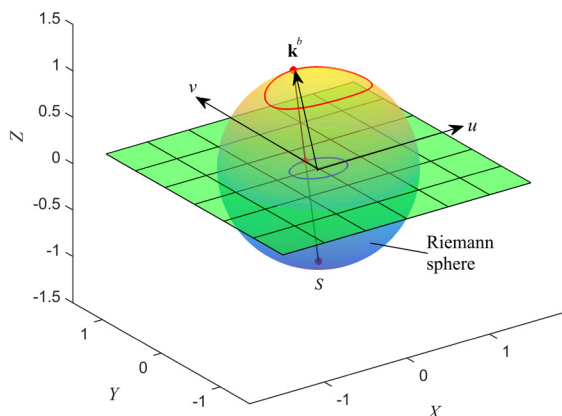


Рисунок 6 – Движение вектора $\mathbf{k}^b$ в системе координат $O\xi'\eta'\zeta'$ и его стереографическая проекция

Figure 6 – Movement of a vector $\mathbf{k}^b$ in a coordinate system $O\xi'\eta'\zeta'$ and its stereographic projection

Таким образом, гироскопическая система ориентации подвижного объекта может быть реализована на основе решения уравнений (21), используя измерения ω_{ξ}^b , ω_{η}^b , ω_{ζ}^b . Результатом решения уравнений являются параметры (w, z) , которые могут быть использованы для управления подвижным объектом. При необходимости традиционные углы рыскания, тангажа и крена могут быть определены с помощью соотношений (23)–(25).

Комплексированная система ориентации

Для коррекции гироскопических систем ориентации применяют акселерометры – датчики кажущегося ускорения, измеряющие векторную сумму абсолютного ускорения объекта и ускорения силы тяжести. В условиях равномерного прямолинейного движения показания акселерометров содержат только проекции вектора ускорения силы тяжести, что позволяет их использовать для коррекции гироскопических систем ориентации.

Пусть вектор ускорения силы тяжести направлен вдоль оси $O\zeta$, тогда при движении объекта без ускорений нормированные показания акселерометров, измерительные оси которых совпадают с осями связанной системы координат $O\xi^b\eta^b\zeta^b$, будут соответствовать третьему столбцу матрицы (22):

$$n_{\xi}^b = -\sin \gamma \cos \vartheta, n_{\eta}^b = \sin \vartheta, n_{\zeta}^b = \cos \gamma \cos \vartheta. \quad (27)$$

Угол z очевидно не входит в соотношения (27), поскольку это вращение происходит вокруг вектора ускорения силы тяжести. Аргументы функции $w^a = w^a(u^a, v^a)$, полученные по акселерометрам, будут определяться соотношениями:

$$u^a = \frac{n_{\xi}^b}{1 + n_{\zeta}^b}, v^a = \frac{n_{\eta}^b}{1 + n_{\zeta}^b}. \quad (28)$$

В результате, имеет место два набора параметров на комплексной плоскости. Первый набор (u, v) формируется каналом гироскопов на основе решения кинематических уравнений (18) и (19), в которых входными данными являются проекции: ω_{ξ}^b , ω_{η}^b , ω_{ζ}^b , содержащие в общем случае различного рода инструментальные погрешности. Так как определение параметров ориентации основано на интегрировании, то вычисление параметров (u, v) в этом случае будет сопровождаться накоплением погрешностей.

Второй набор параметров (u^a, v^a) формируется на основе нормированных сигналов канала акселерометров $n_\xi^b, n_\eta^b, n_\zeta^b$. Поскольку определение параметров (u^a, v^a) осуществляется без процедуры интегрирования, то накопление погрешностей с течением времени отсутствует, но их значения подвержены шуму акселерометров и искажаются ускорениями объекта.

Рисунки 7, 8 иллюстрируют результаты моделирования параметров ориентации на основе уравнений (18), (19) и соотношений (27) и (28). При моделировании учитывались смещение нулевых сигналов гироскопов, значением 0,1 °/с, и случайные погрешности акселерометров со среднеквадратическим отклонением 0,01g.

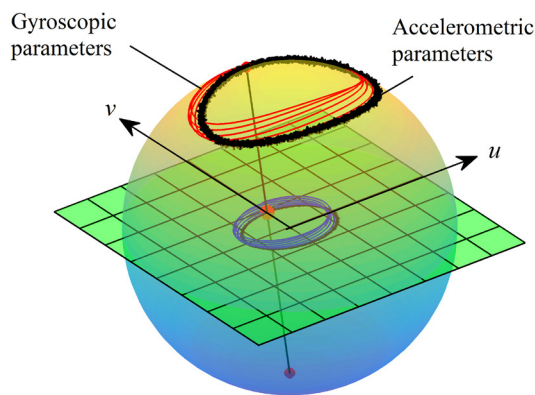


Рисунок 7 – Результаты моделирования движения вектора k^b по гироскопическим и акселерометрическим измерениям с учётом их инструментальных погрешностей

Figure 7 – Results of modeling the k^b vector motion using gyroscopic and accelerometric measurements, taking into account their instrumental errors

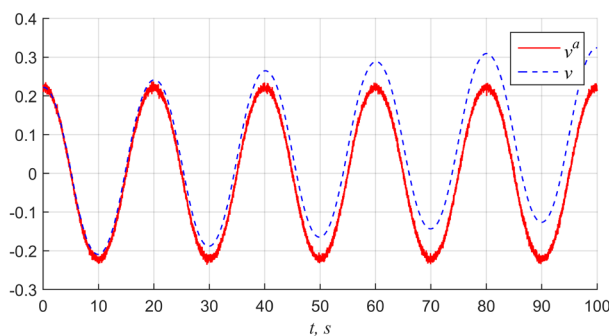


Рисунок 8 – Зависимость от времени параметров v и v^a

Figure 8 – Time dependence of parameters v and v^a

Из анализа результатов моделирования видно, что наблюдается дрейф гироскопических параметров, а также высокая чувствительность

акселерометрических данных к шумам. Рисунок 8 иллюстрирует результаты моделирования параметров v и v^a , при этом параметры u и u^a ведут себя аналогично.

Для повышения точности системы ориентации применяется схема комплексирования, изображенная на рисунке 9. Эта схема позволяет эффективно компенсировать погрешности гироскопов и снизить влияние шумов акселерометров, обеспечивая более надёжное и точное определение ориентации. В данной схеме гироскопические параметры ориентации (u, v) , полученные на основе решений кинематических уравнений (18) и (19), пропускаются через фильтр верхних частот (*high-pass filter*, *HPF*), в то время как акселерометрические параметры проходят через фильтр нижних частот (*low-pass filter*, *LPF*). Затем выходные сигналы фильтров объединяются путём сложения, что позволяет сформировать комплексированные параметры ориентации (u^c, v^c) , обладающие повышенной точностью.

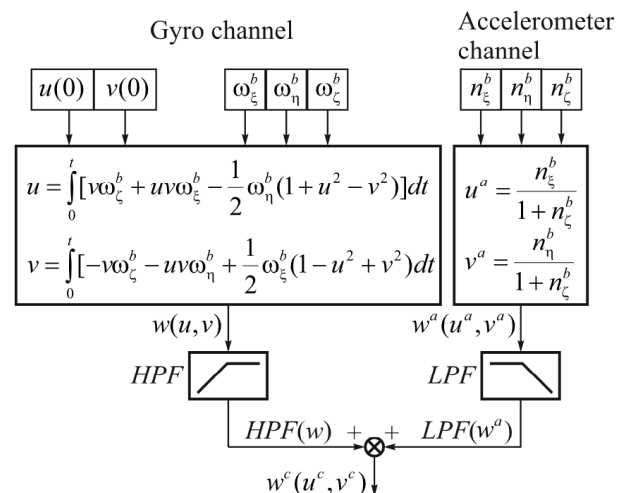


Рисунок 9 – Схема комплексирования параметров ориентации

Figure 9 – Scheme of orientation parameter integration

На рисунке 10 представлены результаты моделирования работы комплексированной системы при условиях движения и с учётом инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров, описанных выше. Фильтры верхних (*HPF*) и нижних (*LPH*) частот моделировались с использованием передаточных функций вида:

$$W_{HPF}(s) = Ts(Ts + 1)^{-1}, \quad W_{LPH}(s) = (Ts + 1)^{-1},$$

где T – постоянная времени, которая принималась в данном случае равной 1 с.

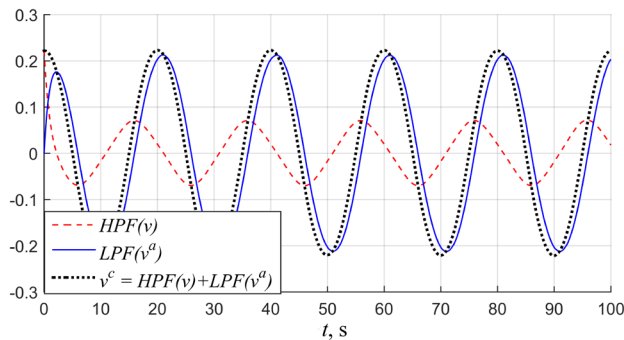


Рисунок 10 – Выходные сигналы фильтра верхних частот ($HPV(v)$), фильтра нижних частот ($LPV(v^a)$), а также комплексированный параметр (v^c)

Figure 10 – Output signals of the high-pass filter ($HPV(v)$), low-pass filter ($LPV(v^a)$), and the complexed parameter (v^c)

Таким образом, значительное снижение уровня шума и отсутствие накопления погрешностей подтверждают высокую эффективность комплексирования. При необходимости углы тангажа и крена могут быть найдены по комплексированным значениям u^c и v^c . Коррекция угла z может быть выполнена по магнитометрам аналогичным образом.

Заключение

Показана эффективность использования параметров (w, z) в бесплатформенных системах ориентации, обусловленная тем, что интегрируются три кинематических уравнений вместо четырёх, как в широко применяемых кватернионных алгоритмах. Несмотря на нелинейность, кинематические уравнения, основанные на параметрах (w, z) , не подвержены эффекту блокировки осей, характерному для углов Эйлера. Установлено, что кинематические уравнения, описывающие эволюцию во времени аргументов функции $w(u, v)$, могут быть проинтегрированы независимо от угла z , при этом углы тангажа и крена объекта могут быть восстановлены всего лишь по двум кинематическим уравнениям. Данные особенности выгодно отличают параметры (w, z) от других известных параметров ориентации. Наглядность интерпретации вращений обеспечивается представлением стереографической проекции одной из осей объекта.

Приводится схема комплексирования гироскопических и акселерометрических измерений, отличающаяся от известных, тем, что интеграция данных осуществляется не по углам тангажа и крена, а по аргументам функции $w(u, v)$, что может снизить загрузку вычислительного устройства до 30 %.

Дальнейшее развитие практического применения параметров (w, z) связано с построением эффективных численных алгоритмов ориентации и комплексированием с магнитометрическими датчиками.

Благодарности

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований малыми отдельными научными группами» (региональный конкурс) № 25-29-20077, <https://rscf.ru/project/25-29-20077/> по теме: «Разработка алгоритмов ориентации и навигации подвижных объектов различного базирования на основе новых кинематических параметров и способов комплексирования измерительной информации». Авторы также выражают благодарность правительству Тульской области за предоставление гранта в форме субсидий (соглашение № 30-2025-000527 от 03.04.2025).

Список использованных источников

1. Челноков Ю.Н. Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. II: Возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел / Ю.Н. Челноков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 1. – С. 3-32.
2. Августов Л.И. Навигация летательных аппаратов в околоземном пространстве / Л.И. Августов [и др.]. – Москва : Издательство "Научтехлитиздат", 2015. – 592 с.
3. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике [Электронный ресурс] / А.П. Побегайло. – Минск : БГУ, 2019. – 223 с.
4. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике / В.Н. Гордеев. – Киев: Издательство "Сталь", 2016. – 316 с.

5. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением: монография / Ю.Н. Челноков. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 554 с.

6. Fourati H., Belkhiat D.E.C. Multisensor Attitude Estimation: Fundamental Concepts and Applications: Devices, Circuits, and Systems/ CRC Press, 2016. – 606 p.

7. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / Ишлинский А. Ю. – М. : Наука, 1976. – 670 с.

8. Tsiotras P., Corless M., and Longuski J. M. A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft. *Automatica*, 1995., vol. 31, no. 8, pp. 1099–1112.

9. Meng Z., Dimarogonas D., Johansson K. Attitude Coordinated Control of Multiple Underactuated Axisymmetric Spacecraft. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. 2016. – P. 1-1.

DOI: 10.1109/TCNS.2016.2562503

10. Markley L., Crassidis J. Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. New York, Springer. 2014. – 486 p.

11. Jerry R. Muir, Jr. Complex Analysis: A Modern First Course in Function Theory, First Edition. John Wiley & Sons, Inc. 2015. – 277 p.

12. Aboelmagd N., Tashfeen B. K., Jacques G. Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration. Springer Science & Business Media. 2012. – 314 p.

Acknowledgments

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation for Fundamental Scientific Research and Exploratory Scientific Research by Small Individual Research Groups (regional competition) No. 25-29-20077, <https://rscf.ru/project/25-29-20077/> on the topic: "Development of algorithms for orientation and navigation of moving objects of various locations based on new kinematic parameters and methods for integrating measurement information." The authors also express their gratitude to the Government of the Tula Region for providing a grant in the form of subsidies (agreement No. 30-2025-000527 dated 03.04.2025).

References

1. Chelnokov YuN. Quaternion Methods and Regular Models of Celestial and Spaceflight Mechanics: Using Euler (Rodrigues–Hamilton) Parameters to Describe Orbital (Trajectory) Motion. II: Perturbed Spatial Constrained Three-Body Problem. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Body Mechanics*. 2023;(1):3–32.

DOI: 10.31857/S0572329922600293

2. Avgustov LI, Babichenko AV, Orekhov MI, Sukhorukov SYa, Shkred VK. [Navigation of aircraft in near-earth space. Moscow, Nauchtekhlitizdat. 2015;592 p.

3. Pobegaylo AP. Application of quaternions in computer geometry and graphics. Minsk, BSU. 2019;223 p.

4. Gordeyev VN. Quaternions and biquaternions with applications in geometry and mechanics.. Kiyev, Stal. 2016;316 p.

5. Chelnokov YuN. Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control: monograph. Moscow, FIZMATLIT. 2011;554 p.

6. Fourati H., Belkhiat DEC. Multisensor Attitude Estimation: Fundamental Concepts and Applications: Devices, Circuits, and Systems, CRC Press. 2016; 606 p.

7. Ishlinsky AYU. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow, Nauka. 1976;670 p.

8. Tsiotras P, Corless M, and Longuski JM. A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft. *Automatica*. 1995;31(8):1099-1112.

9. Meng Z, Dimarogonas D, Johansson K. Attitude Coordinated Control of Multiple Underactuated Axisymmetric Spacecraft. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. 2016;1-1 p.

DOI: 10.1109/TCNS.2016.2562503

10. Markley L, Crassidis J. Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. New York, Springer. 2014;486 p.

11. Jerry R, Muir Jr. Complex Analysis: A Modern First Course in Function Theory, First Edition. John Wiley & Sons, Inc. 2015;277 p.

12. Aboelmagd N, Tashfeen BK, Jacques G. Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration. Springer Science & Business Media 2012;314 p.