Формирование доменной структуры в проектировании открытых информационно-измерительных систем

М.А. Князев

*Белорусский национальный технический университет,
пр-т Независимости, 65, г. Минск 220013, Беларусь*

Поступила 26.10.2022
Принята к печати 28.11.2022

Возможности использования и значение открытых систем при проектировании и создании средств измерения постоянно возрастают. Применение существенно нелинейных моделей, для решения которых методы теории возмущений оказываются недостаточными, находит всё более широкое распространение в задачах математического моделирования такого рода разработок. Используемые при этом модели, а значит и нелинейные уравнения, применяемые для их описания, имеют решения в виде топологически нетривиальных состояний – солитонов, кинков и подобных им объектов. Одним из таких уравнений является уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, применяемое для описания процессов «конвенция-реакция-диффузия», которое находит применение при исследовании процессов самоорганизации и построения структурных формирований в неравновесных открытых системах. Целью настоящей работы являлось построение нового решения модифицированного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, учитывающего пространственную неоднородность в системе.

Для решения указанной задачи применен прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных, в который внесены некоторые дополнительные ограничения.

Построено в явном виде новое топологически нетривиальное решение модифицированного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова в виде одиночного кинкоподобного объекта и приведены аргументы в пользу того, что полученное решение является устойчивым относительно малых возмущений.

В результате проведенного математического моделирования показана возможность возникновения в системе, описываемой модифицированным уравнением Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, доменной структуры.

Ключевые слова: уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, метод Хироты, кинк.

DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

Адрес для переписки:
Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет,
пр-т Независимости, 65, г. Минск 220013, Беларусь
e-mail: maknyazev@bntu.by

Address for correspondence:
Knyazev M.A.
Belarusian National Technical University,
Nezavisimosty Ave., 65, Minsk 220013, Belarus
e-mail: maknyazev@bntu.by

Для цитирования:
М.А. Князев.
Формирование доменной структуры в проектировании открытых информационно-измерительных систем.
Приборы и методы измерений.
2022. – Т. 13, № 4. – С. 256–262.
DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

For citation:
M.A. Knyazev.
[Domain Structure Formation in Designing of the Opened Informative Measuring Systems].
Devices and Methods of Measurements.
2022, vol. 13, no. 4, pp. 256–262 (in Russian).
DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

Domain Structure Formation in Designing of the Opened Informative Measuring Systems

M.A. Knyazev

*Belarusian National Technical University,
Nezavisimosty Ave., 65, Minsk 220013, Belarus*

*Received 26.10.2022
Accepted for publication 28.11.2022*

Abstract

The opened systems possess an increasing significance and possibilities of applying in designing of measuring devices. Now an essentially nonlinear models are used for such systems. The perturbation approach is not enough for these purposes. Models of new types have solutions in a form of soliton or kink and similar objects. The equation of Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov is one of such equations. This equation is used for description of convection-reaction-diffusion processes. Such processes are used for studying of a self-organisation and formation of a structure in non-equilibrium opened systems. The aim of this work was to construct of a new solution for the modified equation of Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov in which a space inhomogeneity is accounted.

To solve this problem the direct Hirota method for nonlinear partial differential equation is applied. Some modifications into this method were introduced.

The new topologically non-trivial solution of the modified Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation is constructed explicitly. This solution has a kink-like form. Some arguments on the stability of such solution are considered.

A possibility of domain structure formation in the systems which describe by the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation is demonstrated.

Keywords: Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation, Hirota method, kink.

DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

Адрес для переписки:
*Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет,
пр-т Независимости, 65, г. Минск 220013, Беларусь
e-mail: maknyazev@bntu.by*

Address for correspondence:
*Knyazev M.A.
Belarusian National Technical University,
Nezavisimosty Ave., 65, Minsk 220013, Belarus
e-mail: maknyazev@bntu.by*

Для цитирования:
М.А. Князев.
Формирование доменной структуры в проектировании открытых информационно-измерительных систем.
Приборы и методы измерений.
2022. – Т. 13, № 4. – С. 256–262.
DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

For citation:
M.A. Knyazev.
[Domain Structure Formation in Designing of the Opened Informative Measuring Systems].
Devices and Methods of Measurements.
2022, vol. 13, no. 4, pp. 256–262 (in Russian).
DOI: 10.21122/2220-9506-2022-13-4-256-262

Введение

Использование открытых систем для проектирования и разработки информационно-измерительных устройств приобретает всё более возрастающее значение. Открытые системы всегда подвержены одновременному влиянию значительного количества разнообразных факторов, что позволяет использовать их в качестве моделей или экспериментальных прототипов при создании приборов с элементами искусственного интеллекта. При этом наиболее эффективным является подход, в котором рассматриваются существенно нелинейные задачи.

Нелинейные задачи, а также используемые для их описания нелинейные уравнения в частных производных привлекают внимание специалистов для построения математических моделей в различных областях науки и техники. Главным образом, это связано с тем, что линейные уравнения или уравнения с малыми возмущениями уже практически исчерпали заложенные в них модельные представления и поведение их решений изучено в полной мере. В настоящее время особый интерес вызывают так называемые существенно нелинейные уравнения. Особенностью этих уравнений является непертурбативный характер входящих в них нелинейных членов, что исключает возможность применения теории возмущений для их исследования. Такие уравнения допускают решения типа солитонов или солитоноподобных объектов (например, кинков) и их связанных состояний.

В настоящей работе нами рассмотрено модифицированное нелинейное уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (ФКПП). В базовом виде в (1+1)-мерном случае это уравнение записывается следующим образом [1]:

$$u_t = Du_{xx} + au - bu^2, \tag{1}$$

где D – коэффициент диффузии; a – параметр, характеризующий скорость роста функции (например, это может быть плотность распределения некоторой популяции); b – параметр, характеризующий квадратичные по плотности конкурентные потери; все эти коэффициенты считаются константами.

В дальнейшем для упрощения вычислений положим их равными единице. В уравнении (1) использованы обозначения вида $u_t = \partial u/\partial t$ и т. п.

Уравнение ФКПП является уравнением типа «конвенция–реакция–диффузия» [2]. Оно используется при описании процессов самоорганизации и построения структурных формирований в неравновесных открытых системах различной природы. Задачи подобного рода рассматриваются в биофизике, химии, экологии, технологических процессах, в частности, к ним относятся задачи о волнах заселения среды популяцией и распространения ареала гена [3], задачи тепло- и массообмена [4, 5]. Ряд решений этого уравнения получен в работе [6] с использованием метода однородного баланса.

Чтобы повысить точность описания различных процессов при использовании уравнения ФКПП, в последнее время много внимания уделяется изучению его различных модификаций и обобщений. В работе [7] уравнение ФКПП модифицировано так, чтобы осуществить учёт конкурентных членов третьего порядка, при условии, что они представляют малую поправку к уравнению (1). Это же уравнение, но при условии, что вклад конкурентных членов третьего порядка является существенно нелинейным, рассмотрено в [8]. В работе [2] в результате замены локальных квадратичных потерь интегральным выражением, которое описывало нелокальные квадратичные потери при помощи функции влияния, удалось построить асимптотические решения, описывающие квазистационарные структуры. В работе [9] рассмотрены волны плотности в уравнении ФКПП при учёте эффектов запаздывания. Выполненные численные эксперименты позволили определить такие значения запаздывания, при которых возникают пространственно неоднородные режимы распространения волн. В работе [10] изучены распространяющиеся волны для ряда модификаций уравнения ФКПП, для которых, в отличие от самого уравнения ФКПП, фронт волны не является гладким. Эти новые волны распространяются более медленно, не приводят к затуханию популяции, имеют чётко выраженный фронт. В работе [11] реализовано гиперболическое масштабирование уравнения ФКПП и построены два новых решения в пределе, когда параметр гиперболичности стремится к нулю. Обобщение уравнения ФКПП на случай зависимости коэффициентов от искомой функции рассмотрено в работе [12] при изучении скоростей дисперсии, направлений наклона и

Devices and Methods of Measurements
2022, vol. 13, no. 4, pp. 256–262
M.A. Knyazev

скоростей роста для задачи о распространении некоторых генотипов. В работе [13] рассмотрено обобщение уравнения ФКПП при нелокальной адвекции (перемещении потоков). Указанное приближение позволило описать диффузию и рост популяции при наличии притяжения или отталкивания.

В настоящее время большое внимание привлекает исследование состояний, описываемых уравнением ФКПП, связанных с учётом влияния пространственной неоднородности в изучаемой системе. При этом особый интерес представляет зависимость скорости роста функции, а, следовательно, и устойчивости таких решений.

Цель данной работы – найти новое решение модифицированного уравнения ФКПП, учитывающего пространственную неоднородность в системе.

Модель и метод решения

Рассмотрим модифицированное уравнение ФКПП вида:

$$u_t - u_{xx} - u + u^2 - u_x u = 0. \tag{2}$$

Здесь по сравнению с известными исследованиями введено новое слагаемое $u_x u$. Это слагаемое в простейшей нелинейной форме учитывает влияние пространственной неоднородности системы на её возможное состояние. Знак минус указывает на то, что влияние рассматриваемой неоднородности приводит к уменьшению энергии состояния.

Построим решение уравнения (2) в виде одиночного кинка. Для этого применим прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных, в котором учтём некоторые модификации [14]. Введём новую зависимую переменную:

$$u(x,t) = \sigma(\ln F)_x, \tag{3}$$

где $F = F(x, t)$ – новая неизвестная функция; σ – постоянная, которая будет определена ниже. Подставим выражение (3) в уравнение (2). В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_x F_t}{F^2} - \frac{F_{xxx}}{F} + 3\frac{F_x F_{xx}}{F^2} - 2\frac{F_x^3}{F^3} - \frac{F_x}{F} + +\sigma\frac{F_x^2}{F^2} - \sigma\frac{F_x F_{xx}}{F^2} + \sigma^2\frac{F_x^3}{F^3} = 0. \tag{4}$$

Метод Хироты применим, если новое уравнение (например, уравнение вида (4)) будет второго порядка относительно функции F, т. е. будет иметь билинейный вид. Если преобразованное уравнение будет уравнением третьего порядка относительно функции F (так называемое трилинейное уравнение), то применение метода Хироты ограничено некоторыми условиями. Эти условия в рассматриваемом нами случае не имеют места. Поэтому, поскольку мы ищем частное решение, можно ввести дополнительно некоторое условие, такое, что можно будет применять данный метод. Потребуем, чтобы выполнялось соотношение:

$$(\sigma - 2)\frac{F_x^3}{F^3} = 0,$$

откуда сразу получаем $\sigma = \sqrt{2}$. Теперь мы сможем записать уравнение (4) в виде:

$$F_{xt}F - F_x F_t - F_{xxx}F + (3-\sqrt{2})F_x F_{xx} - F_x F + \sqrt{2}F_x^2 = 0. \tag{5}$$

Данное уравнение является билинейным.

В качестве следующего шага запишем для функции F формальное разложение в ряд теории возмущений:

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + ..., \tag{6}$$

где $f_i = f_i(x,t),\ i = 1,2,3,...$ – новые неизвестные функции; ε – произвольный, вообще говоря, не малый постоянный параметр.

Если подставить соотношение (6) в уравнение (5), а затем приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, то в результате мы получим зацепляющуюся систему линейных уравнений в частных производных такую, что каждая последующая функция f_i будет определяться только предыдущими функциями и их производными. Первое уравнение этой системы будет однородным, а все последующие – неоднородными. Формально такую систему запишем в виде:

$$\Psi_i(f_i) = \Phi(f_k,\ k = 1,2,...,i-1),\ i = 1,2,... \tag{7}$$

В уравнении (7) подразумевается, что в круглых скобках записаны не только сами функции, но и те их производные, которые получаются в результате описанной процедуры. Выражения, стоящие в левых частях уравнений системы (7), будут одинаковыми; их отличие будет состоят только в разных значениях i при функциях ряда (6). Что же касается правых

Devices and Methods of Measurements
2022, vol. 13, no. 4, pp. 256–262
M.A. Knyazev

частей уравнений системы (7), то для каждого значения i они будут совершенно различными. Поскольку полученная система уравнений является линейной, то решать её сравнительно легко (даже имея в виду неоднородные правые части). Таким образом, последовательно находя все f_i и используя соотношения (3) и (6), можно найти решение любого порядка (если оно, конечно, существует).

Вопрос о сходимости ряда (6) требует отдельного рассмотрения. Особенностью метода Хироты является то, что, если существует решение, описывающее связанное состояние i солитонов или солитоноподобных объектов, то для функции f_{i+1} ряд обрывается автоматически. В данной работе мы строим решение только для одиночного кинка. Следовательно, уравнение для функции f_2 должно тождественно обращаться в нуль. Однако этого может и не быть, поскольку преобразованное уравнение (4) является трилинейным, а не билинейным, и мы не можем формально использовать метод Хироты, а вынуждены ввести некоторые дополнительные ограничения. В связи с этим мы должны сами обнулить правую часть уравнение для функции f_2. Для этого подставим в неё выражение для f_1 и потребуем, чтобы эта правая часть обращалась в нуль.

Решение в виде одиночного кинка

Построим решение в виде одиночного кинка. Для этого нам понадобятся первые два уравнения системы (7). Они имеют вид:

$$f_{1,xt} - f_{1,xxx} - f_{1,x} = 0, \tag{8}$$

$$f_{2,xt} - f_{2,xxx} - f_{2,x} = f_{1,x} f_{1,t} - 3 f_{1,x} f_{1,xx} - f_{1,x}^2. \tag{9}$$

Будем искать функцию f_1 в следующем виде:

$$f_1 = \exp\left(kx - \omega t + \eta^0\right), \tag{10}$$

где k, ω, η^0 – параметры решения. Параметр η^0 имеет простой физический смысл. Он определяет положение функции, описывающей решение в начальный момент времени. Без потери общности его можно положить равным нулю. Подставим соотношение (10) в уравнение (8). В результате получим соотношение $\omega = -k^2 - 1$. Это, так называемое, дисперсионное соотношение. Теперь подставим выражение (10) в правую часть уравнения (9) и приравняем её нулю. Получим соотношение $\omega = -3k^2 - k$. В результате мы имеем два уравнения для определения двух неизвестных величин (параметров решения). Из полученных соотношений находим для параметров k и ω следующие фиксированные значения: $k = 1/2$, $\omega = -5/4$.

Теперь, используя принятый в методе Хироты подход к построению одиночного топологически нетривиального решения, можно записать окончательное выражение для одиночного кинка:

$$u(x,t) = \sigma \frac{f_{1,x}}{1 + f_1} = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2}\right)\right]. \tag{11}$$

Причём при построении данного соотношения было принято, что $\varepsilon = 1$. Путём прямой подстановки соотношения (11) в уравнение (2) можно убедиться, что оно является его решением. То, что параметры решения принимают фиксированные значения, можно рассматривать как указание на устойчивый характер описываемого соотношением (11) состояния системы относительно малых возмущений. Данное утверждение не является строгим математическим доказательством, однако неоднократно оно было проверено в ходе вычислительных экспериментов и всегда подтверждалось.

Заключение

Полученное решение не является одиночным кинком в чистом виде. Это, скорее, кинкоподобное решение, поскольку оно содержит не только функцию гиперболического тангенса, но и постоянное слагаемое. Указанное постоянное слагаемое появилось в результате диссипативных процессов в рассматриваемой модели. Известно, что решение немодифицированного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова состоит из трёх составляющих: солитона. кинка и постоянного слагаемого. Учёт в рамках рассматриваемой модели пространственной неоднородности состояния системы привёл к тому, что солитонный вклад в решение отсутствует. Можно сделать вывод, что открытая система, для описания которой используется уравнение (2), допускает существование доменной структуры. В окончательной форме условия, при которых могут образовываться домены, можно получить, если коэффициенты в модифицированном уравнении Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (4) задать отличными от единицы. В тоже время в случае уравнения (1) доменная структура отсутствует, поскольку наложение состояний типа солитона и типа кинка не позволяет чётко выделить в системе области с разными значениями исследуемого параметра.

Список использованных источников

1. *Левченко Е.А.* Асимптотические решения нелокального уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова на больших временах / Е.А. Левченко, Ю.А. Трифонов, А.В. Шаповалов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5. – № 4. – С. 543–558.

2. *Пухов А.А.* Уравнение «реакция-диффузия» / А.А. Пухов // Москва: МФТИ, 2014. – 74 с.

3. *Murray J.D.* Mathematical Biology I: An Introduction / J.D. Murray // Springer-Verlag, 2007, 574 p.

4. *Dalwadi M.P.* Mathematical modeling of chemical agent removal by reaction with an immiscible cleaner / M.P. Dalwadi, O'Kiely, S.J. Thomson, T.S. Khaleque, C.L. Hall // SIAM Journal of Applied Mathematics, 2017, vol. 77, no. 6, pp. 1937–1961.
DOI: 10.1137/16M1101647

5. *Brosa Planella F.* Extended Stefan problem for solidification of binary alloy in a finite planar domain / F. Brosa Planella, C.P. Please, R.A. Van Gorder // SIAM Journal of Applied Mathematics, 2019, vol. 79, no. 3, pp. 876–913. **DOI:** 10.1137/18m118699x

6. *Yiuri Yang, Wei Kou, Xiaopeng Wang, Xurong Chen.* Solitary Wave Solutions of FKPP Equation Using Homogeneous Balance Method [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arXiv:2009.11378 [nlin.PS]. Дата доступа: 24.09.2020.
DOI: 10.48550/arXiv.2009.11378

7. *Волосов К.А.* Новые точные решения уравнений с частными производными параболического типа / К.А. Волосов, Е.К. Вдовина, А.К. Волосов // Москва: МИИТ, 2010. – 134 с.

8. *Блинкова Н.Г.* Решение типа кинка модифицированного уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова / Н.Г. Блинкова, М.А. Князев // Материалы XIII Международной научно-технической конференции «Приборостроение–2020» / Ред. О.К. Гусев и др. // Минск, 2020. – С. 235–236.

9. *Алешин С.В.* Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова с запаздыванием / С.В. Алешин, С.Д. Глызин, С.А. Кащенко // Моделирование и анализ информационных систем. – 2015. – Т. 22. – № 2. – С. 304–321.

10. *Fadai N.T.* New travelling wave solutions of the Porous-Fisher model with a moving boundary / Nabil T. Fadai, Matthew J. Simpson // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2020, vol. 53, no. 9, pp. 095601 (11 p).
DOI: 10.1088/1751-8121/ab6d3c

11. *Reyes M.A., Rosu H.C.* A note of the FKPP equation approached with the hyperbolic scaling [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arXiv:1111.6656[math-phys]. Дата доступа: 05.12.2011.
DOI: 10.48550/arXiv.1111.6656

12. *Kollar R, Novak S.* Existence of travelling waves for the generalized FKPP equation [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://arXiv:1607.00944[math-phys]. Дата доступа: 02.07.2016.
DOI: 10.1007/s11538-016-0244-3

13. *Henderson C.* Slow and fast minimal speed traveling waves of the FKPP equation with chemotaxis [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arXiv:210206065[mathAP]. Дата доступа: 02.08.2022.
DOI: 10.1016/j.matpur.2021.01.001

14. *Князев М.А.* Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев // Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.

References

1. Levchenko E.A., Trifonov Yu.A., Shapovalov A.V. [Asymptotic solutions of non-local Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation]. *Computernye issledovaniya i modelirovanie* [Computer studies and design], 2013, vol. 5, no. 4, pp. 543–558 (in Russian).

2. Puchov A.A. *Uravnenie "reaktsiya-diffusiya"* [Equation "reaction-diffusion"]. Moskva, MFTI Publ., 2014, 74 p.

3. Murray J.D. Mathematical Biology I: An Introduction: Springer-Verlag, 2007, 574 p.

4. Dalwadi M.P., O'Kiely, S.J. Tomson, T.S. Khaleque. Mathematical modeling of chemical agent removal by reaction with an immiscible cleaner. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2017, vol. 77, no. 6, pp. 1937–1961.
DOI: 10.1137/16M1101647

5. Brosa Planella F, C.P. Please, R.A. Van Gorder. Extended Stefan problem for solidification of binary alloy in a finite planar domain. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2019, vol. 79, no. 3, pp. 876–913.
DOI: 10.1137/18m118699x

6. Yiuri Yang, Wei Kou, Xiaopeng Wang, Xurong Chen. Solitary Wave Solutions of FKPP Equation Using Homogeneous Balance Method. [Electronic Resource]. Available at: http://arXiv:2009.11378 [nlin.PS] (accessed: 24.09.2020).
DOI: 10.48550/arXiv.2009.11378

7. Volosov K.A., Vdovina E.K., Volosov A.K. *Novye tochnye resheniya uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [New exact solutions of the partial differential equations]. Moskva, MIIT Publ., 2010, 134 p.

8. Blinkova N.G., Knyazev M.A. *Reshenie typa kinka vjdifitsipovannogo uravneniya Fishera-Kolmogorova-Petrovskogo-Piskunova. Materialy XIII Mezhdunarodnoi nauchno-technicheskoi konferentsii "Proborostroenie-2020"* [Proceedings of the 13th International Scientific and Technical Conference], Minsk, BNTU, 2020, pp. 235–236 (in Russian).

9. Aleshin S.V., Glyzin S.D., Kashchenko S.A. [Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation with delay]. *Modelirovanie i analiz informatsionnych system* [Design and analysis of informative systems], 2015, vol. 22, no. 2, pp. 304–321 (in Russian).

10. Fadai N.T., Simpson M.J. New travelling wave solutions of the Porous-Fisher model with a moving boundary. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020, vol. 53, no. 9, pp. 095601 (11 p). **DOI:** 10.1088/1751-8121/ab6d3c

11. Reyes M.A., Rosu H.C. A note of the FKPP equation approached with the hyperbolic scaling. [Electronic Resource]. Available at: http://arXiv:1111.6656[math-phys] (accessed: 05.12.2011). **DOI:** 10.48550/arXiv.1111.6656

12. Kollar R, Novak S. Existence of travelling waves for the generalized FKPP equation. [Electronic Resource]. Available at: http://arXiv:1607.00944[math-phys] (accessed: 02.07.2016). **DOI:** 10.1007/s11538-016-0244-3

13. Henderson C. Slow and fast minimal speed traveling waves of the FKPP equation with chemotaxis. [Electronic Resource]. Available at: http://arXiv:210206065[mathAP] (accessed: 02.08.2022). **DOI:** 10.1016/j.matpur.2021.01.001

14. Knyazev M.A. *Kinki v skalyarnoi modeli s zatuchaniem* [Kinks in scalar model with damping]. Minsk, Technologiya Publ., 2003, 115 p.