

УДК 537.86.029

Обобщенная математическая модель процессов калибровки и непосредственного измерения параметров многополюсников

Гусинский А.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. П. Бровки, 6, г. Минск 220013, Беларусь

Поступила 09.01.2018

Принята к печати 26.02.2018

Качество измерительных систем сверхвысокочастотного диапазона, в том числе векторных анализаторов цепей, во многом зависит от достоверности процедур калибровок и непосредственных измерений, которые позволяют учесть информацию о воспроизводимых погрешностях измерительных систем для последующей корректировки. Целью работы являлось математическое моделирование погрешностей измерительной системы для обобщенного случая – $2n$ -полюсника.

Рассмотрены вопросы повышения точности измерительных сверхвысокочастотных систем за счет компенсации систематических погрешностей, определяемых при калибровке. Калибровка измерительных систем и корректировка результатов непосредственных измерений по результатам калибровки требуют использования соответствующих математических моделей погрешностей. Математические модели погрешностей представляются в виде многополюсников погрешностей, включаемых между объектом измерения и измерительной системой, которая предполагается идеальной, т.е. свободной от погрешностей.

В статье предложена обобщенная математическая модель погрешностей, описываемая многополюсником погрешностей, содержащим n портов, соединяемых с n -портовой измерительной системой, и n портов, соединяемых с n портом объекта измерения. Для получения в общем виде уравнения калибровки для $2n$ -портовой модели многополюсника погрешностей использована его волновая матрица передачи $[T]$, записанная в клеточном виде, а затем найдена связь между результатом измерений в матричном виде с клеточной волновой матрицей T . Рассмотрено решение для нахождения матрицы погрешностей матричного уравнения, связывающего известные по результатам соответствующей аттестации матрицы для эталонов с результатами измерений при калибровке в матричном виде. При решении этого уравнения из-за клеточной волновой матрицы $[T]$ появляется матричное произведение «сэндвичного» типа. Решение возможно при использовании кронекеровского произведения двух матриц, оператора перемещения матрицы, RS -оператора матрицы, а также метода исключения Гаусса. Получено уравнение восстановления действительных значений матрицы рассеяния объекта измерения, исходя из результатов непосредственных измерений в матричном виде и матрицы погрешностей. При решении уравнения восстановления целесообразно использовать матрицу, инверсную к матрице передачи $[T]$.

Разработанная обобщенная математическая модель может быть использована, например, при необходимости измерения параметров сложных СВЧ устройств, выполненных на платах (подложках), с переходами-зондами к измерительным портам, где важно учитывать наличие дополнительных утечек СВЧ мощности между портами.

Ключевые слова: сверхвысокие частоты, произвольный многополюсник, многополюсник погрешностей, матричное уравнение калибровки, матричное уравнение непосредственного измерения.

DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

Адрес для переписки:

Гусинский А.В.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. П. Бровки, 6, г. Минск 220013, Беларусь
e-mail: avggus@mail.ru

Address for correspondence:

Gusinsky A.V.
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
P. Brovka str., 6, Minsk 220013, Belarus
e-mail: avggus@mail.ru

Для цитирования:

Гусинский А.В.
Обобщенная математическая модель процессов калибровки и непосредственного измерения параметров многополюсников. Приборы и методы измерений. 2018. – Т. 9, № 1. С. 96–105.
DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

For citation:

Gusinsky A.V.
[Generalized mathematical model of the calibration process and the direct measurement of the parameters multipole].
Devices and Methods of Measurements. 2018, vol. 9, no. 1, pp. 96–105 (in Russian).
DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

Generalized mathematical model of the calibration process and the direct measurement of the parameters multipole

Gusinsky A.V.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
P. Brovka str., 6, Minsk 220013, Belarus

Received 09.01.2018

Accepted for publication 26.02.2018

Abstract

The quality of measuring systems of the microwave range, including vector network analyzers, largely depends on the reliability of calibration procedures and direct measurements, which allow to take into account information about the reproducible errors of measuring systems for subsequent correction. The aim of the paper is mathematical modeling of the errors of the measuring system for the generalized case for $2n$ -pole device.

The problems of increasing the accuracy of measuring microwave systems due to compensation of systematic errors determined during calibration are considered. Calibration of measuring systems and correction of the results of direct measurements based on calibration results require the use of appropriate mathematical models of errors. Mathematical models of errors are represented in the form of multipolar errors, included between the object of measurement and the measuring system, which is assumed to be ideal, ie, free of errors.

The article proposes a generalized mathematical model of errors, described by a network of errors containing n ports connected to the n -port measuring system, and n ports connected to the n port of the measurement object. To obtain in general form the calibration equation for the $2n$ -port model of the error multipolar network, its transmission wave matrix $[T]$, recorded in a cellular form, was used, and then a relationship was found between the measurement result in a matrix form with the cellular wave matrix T . A solution for finding the error matrix of matrix equation that connects the matrices known from the results of the corresponding attestation for the standards with the results of measurements during calibration in the matrix form. When solving this equation, a matrix product of «sandwich» type appears due to the cellular wave matrix $[T]$. The solution is possible when using the Kronecker product of two matrix, the matrix translation operator, the RS operator of the matrix, and the Gaussian elimination method. An equation is obtained for reconstructing the actual values of the scattering matrix of the measurement object, starting from the results of direct measurements in the matrix form and the error matrix. When solving the reconstruction equation, it is advisable to use a matrix inverse to the transmission matrix $[T]$.

The developed generalized mathematical model can be used, for example, when it is necessary to measure the parameters of complex microwave devices made on boards (wafer), with probe transitions to measuring ports, where it is important to consider the presence of additional microwave power leaks between ports.

Keywords: ultrahigh frequencies, arbitrary multipolar network, a network of errors, a matrix equation of calibration, a matrix equation of direct measurement.

DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

Адрес для переписки:

Гусинский А.В.
Белорусский государственный университет информатики и радио-
электроники,
ул. П. Бровки, 6, г. Минск 220013, Беларусь
e-mail: avggus@mail.ru

Address for correspondence:

Gusinsky A.V.
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
P. Brovka str., 6, Minsk 220013, Belarus
e-mail: avggus@mail.ru

Для цитирования:

Гусинский А.В.
Обобщенная математическая модель процессов калибровки
и непосредственного измерения параметров многополюсников.
Приборы и методы измерений.
2018. – Т. 9, № 1. С. 96–105.

DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

For citation:

Gusinsky A.V.
[Generalized mathematical model of the calibration process and the
direct measurement of the parameters multipole].
Devices and Methods of Measurements.
2018, vol. 9, no. 1, pp. 96–105 (in Russian).

DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-96-105

Введение

Процедура калибровки измерительных систем сверхвысокочастотного диапазона, в том числе векторных анализаторов цепей, способна обеспечить получение информации о воспроизводимых погрешностях системы для последующей корректировки при непосредственных измерениях [1–5]. Это требует использования соответствующих математических моделей погрешностей. Существует большое разнообразие моделей погрешностей и процедур калибровок, которые отличаются по степени сложности и эффективности [6–10]. Но типичной особенностью всех предлагаемых моделей погрешностей является представление повторяющихся, т.е. систематических погрешностей измерительной системы посредством некоторых многополюсников погрешностей, включаемых между объектом измерения и измерительной системой, которая предполагается идеальной, т.е. свободной от погрешностей.

В качестве математической модели погрешностей, используемой в самом общем случае – для произвольного многополюсника с числом портов n (с числом полюсов соответственно $2n$), с учетом погрешностей, вызываемых возможностями утечек сигнала за счет связей между всеми парами портов, может быть использован многополюсник погрешностей в виде $4n$ -полюсника, который в эквивалентной схеме измерения связывает n -портовый объект измерения со свободной от погрешностей n -портовой измерительной системой. При этом все систематические погрешности измерительной системы представляются посредством параметров матрицы рассеяния $[E]$ этого $2n$ -портового многополюсника погрешностей.

Многополюсник погрешностей в таком случае содержит n портов ($i = 1, n$), соединяемых с n -портовой измерительной системой, и n портов ($j = n + 1, 2n$) подсоединяемых к n портам объекта измерения. Первая группа портов представляет собой входы многополюсника погрешностей, на которых определяются измеряемые параметры матрицы рассеяния $[S_x]$ объекта измерения (ОИ), а вторая группа портов представляет собой выходы, к которым «подключены» действительные значения параметров матрицы рассеяния $[S_x]$ ОИ.

Целью работы являлось математическое моделирование погрешностей измерительной системы для обобщенного случая – случая $2n$ -полюсника.

Математическая модель калибровки и непосредственного измерения

Обобщенная математическая модель измерения для $2n$ -полюсника приведена на рисунке.

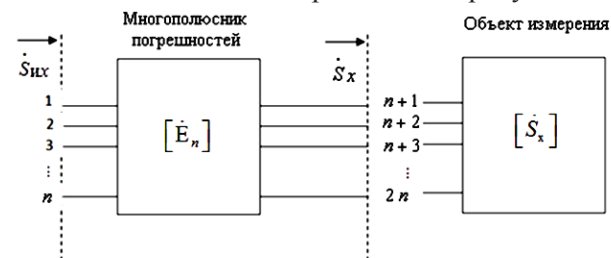


Рисунок – Обобщенная математическая модель измерения для $2n$ -полюсника

Figure – Generalized mathematical model of measurement for $2n$ -polyusnik

Для количественного описания в матричном виде многополюсника погрешностей на каждой частоте необходимо иметь максимум $(2n)^2$ независимых комплексных параметров. При этом оптимальным представляется вариант установления соответствия между портами $i = 1, n$ входа и портами $j = n + 1, 2n$ выхода, при котором любой из n сигнальных путей между входом i и соответствующим выходным портом $j = I + n$ можно рассматривать как «прямой» путь, в то время как любой другой путь можно считать представляющим сигналы утечки. Тогда из общего числа путей $n(2n - 1)$ имеются $2n(n - 1)$ путей утечки и n прямых путей и, как следствие этого, из общего числа $(2n)^2$ независимых комплексных параметров, описывающих многополюсник погрешностей, $4n(n - 1)$ параметров представляют сигналы утечки и $4n$ параметров описывают прямые пути.

В ситуациях нулевых утечек, когда существуют только прямые пути сигналов, $2n$ -портовая схема многополюсника погрешностей может быть расщеплена по горизонтали на n двухпортовых схем, непосредственно связывающих соответствующие входы и выходы. В этом случае матричное представление $[E]$ будет содержать $4n$ ненулевых параметров и $4n(n - 1)$ нулевых.

Для получения в общем виде уравнения калибровки при $2n$ -портовой модели многополюсника погрешностей можно использовать его волновую матрицу передачи $[T]$ порядка $(2n \times 2n)$, записываемую в клеточном виде, и затем найти связь измеренной матрицы рассеяния $[S_u]$ ОИ с его матрицей рассеяния $[S_x]$, выражаемой через матрицы-клетки волновой матрицы $[T]$.

Матрица $[T]$ $2n$ -портового многополюсника погрешностей связывает матрицу падающих и отраженных волн входа a_i и b_i с матрицей падающих и отраженных волн выхода a_j и b_j в соответствии с матричным выражением [1]:

$$\begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} [b_j] \\ [a_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{aa}] & [T_{ab}] \\ [T_{ba}] & [T_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_j] \\ [a_j] \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где:

$$[a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; [a_j] = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}; [b_j] = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать волны со стороны объекта измерения, то роли волн a_j и b_j выхода многополюсника погрешности взаимно меняются, т. е. волны b_j распространяясь от цепи многопо-

люсника погрешностей, по отношению к объекту измерения являются падающими, в то время как волны a_j , падающие на цепь многополюсника погрешностей, распространяются от объекта измерения. Как следствие данного обстоятельства волны a_j соотносятся с волнами b_j через матрицу рассеяния $[S_x]$ порядка $(n \times n)$ как:

$$[a_j] = [S_x][b_j]. \quad (2)$$

Тогда волны a_j и b_j выхода многополюсника погрешностей могут быть записаны в виде:

$$\begin{bmatrix} [b_j] \\ [a_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [1] \\ [S_x] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_j] \\ [b_j] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $[0]$ – нулевая матрица порядка $(n \times n)$; $[1]$ – единичная матрица порядка $(n \times n)$.

При подстановке выражения (3) в правую часть выражения (1), проведя перемножение блочных матриц, получим матричное уравнение порядка $(2n \times 2n)$ вида

$$\begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{aa}] & [T_{ab}] \\ [T_{ba}] & [T_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [1] \\ [S_x] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_j] \\ [b_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{ab}] & [S_x] \\ [T_{bb}] & [S_x] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_j] \\ [b_j] \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Данное уравнение может быть расщеплено горизонтально на два матричных уравнения порядка $(n \times n)$:

$$[a_i] = ([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])[b_j]; \quad (5)$$

$$[b_i] = ([T_{bb}][S_x] + [T_{ba}])[b_j]. \quad (6)$$

Уравнение (5) может быть решено относительно матрицы $[b_j]$ перемножением на матрицу $([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])^{-1}$; при этом получаем:

$$[b_i] = ([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])^{-1}[a_i]. \quad (7)$$

Сравнивая полученное выражение (7) с определением матрицы рассеяния $[S_u]$ порядка $(n \times n)$ на входе многополюсника погрешностей

$$[b_i] = [S_u][a_i], \quad (8)$$

имеем:

$$[S_u] = ([T_{bb}][S_x] + [T_{ba}])([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])^{-1}. \quad (9)$$

Это уравнение показывает, как четыре клеточные матрицы $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$ матрицы

передачи $[T]$ $2n$ -портового многополюсника погрешностей связывают матрицу $[S_u]$ с матрицей $[S_x]$. Уравнение (9) является в обобщенном виде уравнением калибровки измерительной системы, представляемой $2n$ -полюсной эквивалентной схемой.

Если для калибровки используется v эталонов ($l=1, v$) то в случае использования l -го эталона на уравнение (9) может быть записано как:

$$[S_{ul}^k] = ([T_{bb}] [S_l^k] + [T_{ba}])([T_{ab}] [S_l^k] + [T_{aa}])^{-1}, \quad (10)$$

где $[S_l^k]$ – известная по результатам соответствующей аттестации матрица l -го эталона.

Выражение (10) определяет матричное преобразование известной матрицы $[S_l^k]$ в матрицу измерения $[S_{ul}^k]$ порядка $(n \times n)$. Преобразование (10) описывает n -портовое отражение на входе эталона, трансформированное через $2n$ -портовую схему.

При $n = 1$ многополюсник погрешностей сокращается до обычного четырехполюсника, матрицы $[S_l^k]$ и $[S_{ul}^k]$ становятся матрицами параметров, представляющих по физическому смыс-

лу коэффициенты отражения, а $[T]$ становится матрицей 2-го порядка. Выражение (10) в таком случае сводится к преобразованию отражения от нагрузки с заданным импедансом через линейный четырехполюсник.

$$[T_{bb}] [S_l^k] + [T_{ba}] - [S_{ul}^k] [T_{ab}] [S_l^k] - [S_{ul}^k] [T_{aa}] = [0], \quad (11)$$

где $[0]$ – нулевая матрица порядка n^2 .

Каждое из этих v уравнений может быть сведено к ряду из n^2 линейных однородных уравнений на входе многополюсника погрешностей, описываемого $[T]$. Так как это матрица порядка $2n$ и она содержит $(2n)^2$ элементов, то решение уравнения (11) требует в общем случае решения четырех систем уравнений для четырех n -портовых эталонов. Если при $n = 2$ решение этой задачи для каждого эталона представляет достаточно хорошо разработанную процедуру, то при n , больших 2, можно столкнуться со сложной задачей.

Исследуем возможность решения уравнения (11) в матричной форме благодаря выражению клеточных матриц $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$ в виде матричных функций от матриц $[S_{ul}^k]$ и $[S_l^k]$. Из-за некоммутативности матричного произведения и появления клеточной матрицы $[T_{ab}]$ в матричном произведении «сэндвичного» вида $[S_{ul}^k] [T_{ab}] [S_l^k]$ решить систему соответствующих скалярных линейных уравнений не удастся. Тем не менее произведение матриц «сэндвичного» типа в (11) можно исключить, применяя преобразование, использующее два матричных оператора – это кронекеровское произведение $[A] \otimes [B]$ двух матриц $[A]$ и $[B]$ и оператор перемещения $S([A])$ матрицы $[A]$.

Применяя к матрицам $[A]$ и $[B]$ 12-го порядка ($n \times n$) кронекеровское умножение, получают

$$([1] \otimes [S_l^k]^T) RS([T_{bb}]) + RS([T_{ba}]) - ([S_{ul}^k] \otimes [S_l^k]^T) RS([T_{ab}]) - ([S_{ul}^k] \otimes [1]) RS([T_{aa}]) = [0], \quad (15)$$

Преимуществом полученного выражения (15) является то, что все его величины являются произведениями типа матрица-бивектор одинакового порядка n^2 и тем самым получаемые уравнения принимают вид системы линейных однородных матричных уравнений для четырех векторов-столбцов $RS([T_{aa}])$, $RS([T_{ab}])$, $RS([T_{ba}])$, $RS([T_{bb}])$.

$$([1] \otimes [S_l^k]^T) RS([T_{bb}]) + RS([T_{ba}]) - ([S_{u1}^k] \otimes [S_l^k]^T) RS([T_{ab}]) - ([S_{u1}^k] \otimes [1]) RS([T_{aa}]) = [0]; \quad (16)$$

Рассмотрим решение матричного уравнения, представленного в выражении (10) [2].

Можно показать, что любое из v матричных уравнений (10) n -порядка может быть записано как:

$(n^2 \times n^2)$ -матричное произведение, в то время как S -оператор преобразует $(n \times n)$ матрицу $[A]$ в n^2 -размерный вектор-столбец $S([A])$ последовательной перестановкой столбцов матрицы $[A]$ в вертикальном порядке. Альтернативно может быть использован и RS -оператор, воздействие которого аналогично воздействию S -оператора на транспонированную матрицу $[A]^T$, т.е.:

$$RS([A]) = S([A]^T). \quad (12)$$

Следовательно, $RS([A])$ является вектором-столбцом размерностью n^2 , содержащим последовательно в вертикальном порядке строки матрицы $[A]$, повернутые на 90° по часовой стрелке.

Используя указанные выше операторы, можно избавиться от «сэндвичного» вида матричного произведения $[A][B][C]$ в виде одной из следующих форм:

$$S([A][B][C]) = ([B]^T \otimes [A]) S([C]) \quad (13)$$

или

$$RS([A][B][C]) = ([A] \otimes [B]^T) RS([C]). \quad (14)$$

Используя вторую форму записи (14) и дополняя единичной матрицей n -го порядка «несэндвичные» произведения, выражение (11) можно представить в виде:

Если использовать по меньшей мере три n -портовых эталона, измеряемых в ходе калибровки измерительной системы ($v = 3$), то можно получить точные векторные решения системы (15), применяя метод исключения Гаусса в соответствии со следующей методикой.

Для трех уравнение калибровки (15) может быть записано в виде следующих трех уравнений:

$$\left([1] \otimes [S_2^k]^T\right) RS([T_{bb}]) + RS([T_{ba}]) - ([S_{u2}^k] \otimes [S_2^k]^T) RS([T_{ab}]) - ([S_{u2}^k] \otimes [1]) RS([T_{aa}]) = [0]; \quad (17)$$

$$\left([1] \otimes [S_3^k]^T\right) RS([T_{bb}]) + RS([T_{ba}]) - ([S_{u3}^k] \otimes [S_3^k]^T) RS([T_{ab}]) - ([S_{u3}^k] \otimes [1]) RS([T_{aa}]) = [0]. \quad (18)$$

Вычитая выражение (17) из выражения (16), получим:

$$\begin{aligned} & \left([1] \otimes [S_1^k]^T\right) - \left([1] \otimes [S_2^k]^T\right) RS([T_{bb}]) - \left([S_{u1}^k] \otimes [S_1^k]^T\right) - \left([S_{u2}^k] \otimes [S_2^k]^T\right) \cdot RS([T_{ab}]) - \\ & - \left([S_{u1}^k] \otimes [1]\right) - \left([S_{u2}^k] \otimes [1]\right) RS([T_{aa}]) = [D_1] RS([T_{bb}]) - [D_2] RS([T_{ab}]) - \\ & - [D_3] RS([T_{aa}]) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычитая выражение (18) из (16), получим:

$$\begin{aligned} & \left([1] \otimes [S_1^k]^T\right) - \left([1] \otimes [S_3^k]^T\right) RS([T_{bb}]) - \left([S_{u1}^k] \otimes [S_1^k]^T\right) - \left([S_{u3}^k] \otimes [S_3^k]^T\right) RS([T_{ab}]) - \\ & - \left([S_{u3}^k] \otimes [1]\right) - \left([S_{u3}^k] \otimes [1]\right) RS([T_{aa}]) = [D_4] RS([T_{bb}]) - [D_5] RS([T_{ab}]) - [D_6] RS([T_{aa}]) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Умножая выражение (19) на $[D_2]^{-1}$, а выражение (20) на $[D_5]^{-1}$, получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} RS([T_{ab}]) + [D_2]^{-1} [D_3] RS([T_{aa}]) &= [D_2]^{-1} [D_1] RS([T_{bb}]); \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} RS([T_{ab}]) + [D_5]^{-1} [D_6] RS([T_{aa}]) &= [D_5]^{-1} [D_4] RS([T_{bb}]). \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Вычитая выражение (22) из выражения (21), имеем уравнение

$$([D_2]^{-1} [D_3] - [D_5]^{-1} [D_6]) RS([T_{aa}]) = ([D_2]^{-1} [D_1] - [D_5]^{-1} [D_4]) RS([T_{bb}]), \quad (23)$$

которое может быть решено относительно $RS([T_{aa}])$:

$$RS([T_{aa}]) = ([D_2] [D_3] - [D_5] [D_6])^{-1} [D_2]^{-1} [D_1] - [D_5]^{-1} [D_4] RS([T_{bb}]). \quad (24)$$

Подобным же образом, умножая выражение (19) на $[D_3]^{-1}$, а (20) на $[D_6]^{-1}$ получим:

$$\left\{ \begin{aligned} [D_3]^{-1} [D_2] RS([T_{aa}]) + RS([T_{aa}]) &= [D_3]^{-1} [D_1] RS([T_{bb}]); \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [D_6]^{-1} [D_5] RS([T_{ab}]) + RS([T_{aa}]) &= [D_6]^{-1} [D_4] RS([T_{bb}]). \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Вычитая выражение (26) из выражения (25), имеем уравнение:

$$([D_3]^{-1} [D_2] - [D_6]^{-1} [D_5]) RS([T_{ab}]) = ([D_3]^{-1} [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]) RS([T_{bb}]), \quad (27)$$

которое может быть решено относительно $RS([T_{ab}])$:

$$RS([T_{ab}]) = ([D_3]^{-1} [D_2] - [D_6]^{-1} [D_5])^{-1} ([D_3]^{-1} [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]) RS([T_{bb}]). \quad (28)$$

Окончательно, подставляя выражения (24) и (28) в выражение (17), получим:

$$\begin{aligned} RS([T_{ba}]) &= \left([S_{u1}^k] \otimes [S_1^k]^T\right) \left([D_3]^{-1} [D_2] - [D_6]^{-1} [D_5]\right) \left([D_3]^{-1} [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]\right) + \\ & + \left([S_{u1}^k] \otimes [1]\right) \left([D_2]^{-1} [D_1] - [D_5]^{-1} [D_4]\right) - \left([1] \otimes [S_1^k]^T\right) RS([T_{bb}]). \end{aligned} \quad (29)$$

Полученные уравнения (24), (28) и (29) представляют собой решения уравнений калибровки (16)–(18).

В результате решения уравнения калибровки (15) получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} RS([T_{aa}]) &= ([D_2]^{-1} [D_3] - [D_5]^{-1} [D_6]) ([D_2]^{-1} [D_1]^{-1} [D_4]) RS([T_{bb}]); \\ RS([T_{ab}]) &= ([D_3]^{-1} [D_2] - [D_6]^{-1} [D_5])^{-1} ([D_3]^{-1} [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]) RS([T_{bb}]); \\ RS([T_{ba}]) &= \left(([S_{u1}^k] \otimes S_1^k) ([D_3]^{-1} [D_2] - [D_6]^{-1} [D_5])^{-1} ([D_3] [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]) + \right. \\ &+ \left(([S_{u1}^k] \otimes [1]) ([D_2]^{-1} [D_3] - [D_5]^{-1} [D_6])^{-1} ([D_2]^{-1} [D_1] - [D_6]^{-1} [D_4]) - \right. \\ &\left. - ([1] \otimes [S_1^k]) \right) RS([T_{bb}]); \\ RS(T_{bb}) &- произвольный, ненулевой комплексный вектор – столбец порядка n^2 , \end{aligned} \right. \quad (30)$$

где вспомогательные матрицы $[D_1-D_6]$ порядка $n^2 \times n^2$ определяются следующими выражениями:

$$\left\{ \begin{aligned} [D_1] &= ([1] \otimes [S_1^k]^T) - ([1] \otimes [S_2^k]^T); \\ [D_2] &= ([S_{u1}^k] \otimes [S_1^k]^T) - ([S_{u2}^k] \otimes [S_2^k]^T); \\ [D_3] &= ([S_{u1}^k] \otimes [1]) - ([S_{u2}^k] \otimes [1]); \\ [D_4] &= ([1] \otimes [S_1^k]^T) - ([1] \otimes [S_3^k]^T); \\ [D_5] &= ([S_{u1}^k] \otimes [S_1^k]^T) - ([S_{u3}^k] \otimes [S_3^k]^T); \\ [D_6] &= ([S_{u1}^k] \otimes [1]) - ([S_{u3}^k] \otimes [1]). \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Выражения (30), определяя матричные решения уравнения калибровки, заключают некую степень произвольности выбора матричной клетки $[T_{bb}]$. Выбор $[T_{bb}]$ в качестве независимой ма-

тричной переменной произволен, так как процесс исключения переменных по методу Гаусса должен проводиться таким образом, чтобы любой из четырех клеточных матриц $[T]$ мог быть произвольным, в то время как три других определяются как матричные функции в ходе выполнения операций исключения, как было показано выше.

Некоторые ограничения относительно произвольности выбора независимой клеточной матрицы тем не менее существуют. Во-первых, ясно, что бессмысленно выбирать нулевую матрицу. Во-вторых, не годится выбор такой клеточной матрицы, которая делает сингулярной полную матрицу $[T]$. Кроме того, уравнение калибровки должно быть инвариантно к выбору независимого клеточной матрицы, что также накладывает определенные ограничения на произвольность выбора. В таком случае, если в качестве независимой выбрана, как в нашем случае, клеточная матрица $[T_{bb}]$ и она коммутирует со всеми $[S_i^k]$, тогда:

$$\begin{aligned} [S_{ul}^k] &= ([T_{bb}] [S_l^k] + [T_{ba}]) ([T_{ab}] [S_l^k] + [T_{aa}])^{-1} = \\ &= ([S_l^k] + [T_{ba}] [T_{bb}]^{-1}) ([T_{ab}] [T_{bb}]^{-1} [S_l^k] + [T_{aa}] [T_{ab}]^{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

и, таким образом, требуются только три матрицы $[T_{ba}] [T_{bb}]^{-1}$, $[T_{ab}] [T_{bb}]^{-1}$ и $[T_{aa}] [T_{bb}]^{-1}$ для определения матричного преобразования согласно выражению (10).

Для вывода уравнения восстановления действительных значений параметров $[S_x]$ предварительно введем матрицу $[R]$, инверсную к волновой матрице передачи $[T]$:

$$[R] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & \vdots & R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_3 & \vdots & R_4 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где $[R_1], \dots, [R_4]$ – клеточные матрицы инверсной матрицы $[R]$.

Решая матричное уравнение (33) порядка $(2n \times 2n)$ относительно волн a_j, b_j , имеем:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [b_j] \\ [a_j] \end{bmatrix} &= [T]^{-1} \begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{aa}] & \vdots & [T_{ab}] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [T_{ba}] & \vdots & [T_{bb}] \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [R_1] & \vdots & [R_2] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [R_3] & \vdots & [R_4] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

С учетом связи падающих и рассеянных волн на входе многополюсника погрешностей a_j и b_j , определяемой соотношением (8), а именно $b_j = [S_x] [a_j]$, можно записать:

$$\begin{bmatrix} [a_i] \\ [b_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [1] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [S_x] & \vdots & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_i] \\ [a_i] \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Подстановкой выражения (35) получаем следующее матричное уравнение порядка $(2n \times 2n)$:

$$\begin{bmatrix} [b_j] \\ [a_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_1] & \vdots & [R_2] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [R_3] & \vdots & [R_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [1] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [S_x] & \vdots & [0] \end{bmatrix}; \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} [a_i] \\ [a_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_2] [S_u] & \vdots & [R_1] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [R_4] [S_x] & \vdots & [R_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_i] \\ [a_i] \end{bmatrix},$$

которое может быть расщеплено по горизонтали на два матричных уравнения n -порядка:

$$[a_j] = ([R_4][S_u] + [R_3])[a_i], \quad (37)$$

$$[b_j] = ([R_2][S_u] + [R_1])[a_i]. \quad (38)$$

Уравнение (38) может быть затем решено относительно падающих волн a_i :

$$\begin{aligned} [S_x] &= \left\{ ([T_{bb}] - [T_{ba}][T_{aa}][T_{ab}])^{-1} [S_u] + ([T_{ab}] - [T_{aa}][T_{ba}]^{-1}[T_{bb}])^{-1} \right\} \times \\ &\times \left\{ ([T_{ba}] - [T_{bb}][T_{ab}]^{-1}[T_{aa}])^{-1} [S_u] + ([T_{aa}] - [T_{ab}][T_{bb}]^{-1}[T_{ba}])^{-1} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Если клеточные матрицы $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$ взаимно коммутируют, выражение (46) значительно упрощается:

$$[S_x] = ([T_{aa}][S_u] - [T_{ba}])(-[T_{ab}][S_u] + [T_{bb}])^{-1}. \quad (47)$$

Уравнение восстановления действительных значений $[S_x]$ можно решить, используя клеточ-

$S([R_1])$ – произвольный ненулевой вектор-столбец порядка n^2 ;

$$\begin{aligned} S([R_2]) &= -([D_8]^{-1}[D_{15}] - [D_{10}]^{-1}[D_{12}])^{-1} ([D_8]^{-1}[D_{13}] - [D_{10}]^{-1}[D_{14}])S([R_1]); \\ S([R_3]) &= ([D_{11}]^{-1}[D_7] - [D_{12}]^{-1}[D_9])^{-1} ([D_{11}]^{-1}[D_8] - [D_{12}]^{-1}[D_{10}])S([R_1]); \\ S([R_4]) &= ([D_7]^{-1}[D_{11}] - [D_9]^{-1}[D_{12}])^{-1} ([D_7]^{-1}[D_8] - [D_9]^{-1}[D_{10}])S([R_1])^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

$$[a_i] = ([R_2][S_u] + [R_1])^{-1} b_j. \quad (39)$$

Подставляя выражение (39) в выражение (37), получим выражение:

$$[a_j] = ([R_4][S_u] + [R_3])([R_2][S_u] + [R_1])^{-1} b_j. \quad (40)$$

которое с учетом выражения (2) позволяет получить уравнение восстановления этой матрицы в следующем виде:

$$[S_x] = ([R_4][S_x] + [R_3])([R_2][S_x] + [R_1])^{-1}. \quad (41)$$

Клеточные матрицы $[R_1]$, ..., $[R_4]$ инверсной матрицы $[R]$ могут быть представлены через квадраты матрицы $[T]$ в следующем виде:

$$[R_1] = ([T_{aa}] - [T_{ab}][T_{bb}]^{-1}[T_{ba}])^{-1}; \quad (42)$$

$$[R_2] = ([T_{ba}] - [T_{bb}][T_{ab}]^{-1}[T_{aa}])^{-1}; \quad (43)$$

$$[R_3] = ([T_{ab}] - [T_{aa}][T_{ba}]^{-1}[T_{bb}])^{-1}; \quad (44)$$

$$[R_4] = ([T_{bb}] - [T_{ba}][T_{aa}]^{-1}[T_{ab}])^{-1}. \quad (45)$$

С учетом выражений (43)–(45) уравнение восстановления можно записать в следующем виде:

ные матрицы $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$ матрицы передачи $[T]$ (выражение (46)) или через клеточные матрицы $[R_1]$, $[R_2]$, $[R_3]$, $[R_4]$ матрицы R , инверсной к матрице передачи $[T]$.

Клеточные матрицы $[R_1]$, $[R_2]$, $[R_3]$, $[R_4]$ можно непосредственно рассчитывать, используя выражения, аналогичные (15)–(31). Они имеют вид:

и в них вспомогательные матрицы $[D_7]$ – $[D_{16}]$ выражаются в виде:

$$\begin{aligned} [D_7] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [S_1^k] \right) - \left([S_{u2}^k]^T \otimes [S_2^k] \right); \\ [D_8] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [1] \right) - \left([S_{u2}^k]^T \otimes [1] \right); \\ [D_9] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [S_1^k] \right) - \left([S_{u3}^k]^T \otimes [S_3^k] \right); \\ [D_{10}] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [1] \right) - \left([S_{u3}^k]^T \otimes [1] \right); \\ [D_{11}] &= \left([1] \otimes [S_1^k] \right) - \left([1] \otimes [S_2^k] \right); \\ [D_{12}] &= \left([1] \otimes [S_1^k] \right) - \left([1] \otimes [S_3^k] \right); \\ [D_{13}] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [S_1^k]^{-1} \right) - \left([S_{u2}^k]^T \otimes [S_2^k]^{-1} \right); \\ [D_{14}] &= \left([S_{u1}^k]^T \otimes [S_1^k]^{-1} \right) - \left([S_{u3}^k]^T \otimes [S_3^k]^{-1} \right); \\ [D_{15}] &= \left([1] \otimes [S_1^k]^{-1} \right) - \left([1] \otimes [S_2^k]^{-1} \right); \\ [D_{16}] &= \left([1] \otimes [S_1^k]^{-1} \right) - \left([1] \otimes [S_3^k]^{-1} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Заключение

Разработана обобщенная математическая модель измерения параметров матрицы рассеяния $[S_x]$ для произвольного многополюсника ($2n$ -полюсника), в которой математическая модель $4n$ -полюсника погрешностей описывается $2n^2$ параметрами матрицы рассеяния $[E]$. При использовании матричных методов анализа получены уравнения калибровки и восстановления действительных значений параметров матрицы $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$. При этом вместо матрицы рассеяния $[E]$ используется матрица передачи $[T]$ в виде четырех клеточных матриц $[T_{aa}]$, $[T_{ab}]$, $[T_{ba}]$, $[T_{bb}]$. Анализ показал, что из-за появления клеточной матрицы вида $[T_{ab}]$ в матричном произведении «сэндвичного» типа $[S_{ul}^k][T_{ab}][S_l^k]$ решение уравнений возможно при использовании кронекеровского произведения двух матриц $[A] \otimes [B]$, оператора перемещения $[S_x]$ матриц $[A]$ и RS -оператора матрицы $[A]$, а также метода исключения Гаусса. Кроме того, при решении уравнения восстановления действительных значений матрицы $[S_x]$ целесообразно использовать матрицу $[R]$, инверсную к матрице передачи $[T]$.

Разработанная обобщенная математическая модель может быть использована, например, при необходимости измерения параметров сложных СВЧ устройств, выполненных на платах (подложках), с переходами-зондами к измерительным

портам, где важно учитывать наличие дополнительных утечек СВЧ мощности между портами.

Список использованных источников

1. Белоус, А.И. СВЧ-электроника в системах радиолокации и связи. Техническая энциклопедия : в 2 кн. Книга 1 / А.И. Белоус, М.К. Мерданов, С.В. Шведов. – М. : Техносфера, 2016. – 688 с.
2. Белоус, А.И. СВЧ-электроника в системах радиолокации и связи. Техническая энциклопедия : в 2 кн. Книга 2 / А.И. Белоус, М.К. Мерданов, С.В. Шведов. – М. : Техносфера, 2016. – 728 с.
3. Шаров, Г.А. Основы теории сверхвысокочастотных линий передачи, цепей и устройств / Г.А. Шаров. – М. : Горячая линия–Телеком, 2016. – 472.
4. Шаров, Г.А. Волноводные устройства сантиметровых и миллиметровых волн / Г.А. Шаров. – М. : Горячая линия–Телеком, 2016. – 640 с.
5. Голубева, Н.С. Основы радиоэлектроники сверхвысоких частот / Н.С. Голубева, В.Н. Митрохин. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 488 с.
6. Alby, M.M. Remote Calibration Using Mobile, Multiagent Technology / M.M. Alby // IEEE Trans. On Instr. And Meas. – 2005. – Vol. 54, no. 1. – P. 24–30.
7. Sand, A. Secure Approach to Distributed Internet-Enabled Metrology / A. Sand, H. Slinde, T. Fyeldly // IEEE Trans. On Instr. And Meas. – 2007. – Vol. 56, no. 5. – P. 1979–1985.
8. Sand, A. Internet Enabled Calibration: An Analysis of Different Topologies and a Comparison of Two Different Approaches / A. Sand, M. Stevens, G. Parkin // IEEE Trans. Of Instr. And Meas. – 2007. – Vol. 56, no. 5. – P. 1986–1991.
9. Шаров, Г.А. Математика радиоэлектроники сверхвысоких частот (координаты, векторы, матрицы) / Г.А. Шаров, А.М. Кострикин, А.В. Гусинский. – Минск : Бестпринт, 2014. – 240 с.
10. Гусинский, А.В. Векторные анализаторы цепей миллиметровых волн : монография : в 3 ч. Ч. 1. Основные понятия и представления теории преобразования сигналов и спектрального анализа / А.В. Гусинский, Г.А. Шаров, А.М. Кострикин. – Минск : БГУИР, 2004. – 214 с.

References

1. Belous A.I., Merdanov M.K., Shvedov S.V. SVCH-elektronikakh v sistemakh radiolokacii i svyazi. *Tekhnicheskaya ehnciklopediya, V 2-kh knigakh. Kniga 1.* [Microwave Electronics in the systems of Radiolocation and Telecommunication, Technical encyclopedia, v 2 books, Book 1] Moskow, Tekhnosfera Publ., 2016, 688 p. (in Russian).
2. Belous A.I., Merdanov M.K., Shvedov S.V. SVCH-ehlektronika v sistemakh radiolokacii i svyazi. *Tekhnicheskaya ehnciklopediya, V 2-kh knigakh. Kniga 2.* [Microwave Electronics in the systems of Radiolocation

and Telecommunication, Technical encyclopedia, in 2 books, Book 2] Moscow, Tekhnosfera Publ., 2016, 728 p. (in Russian).

3. Sharov G.A. *Osnovy teorii sverkhvysokochastotnykh liniy peredachi, cepej i ustrojstv* [Base theory of the microwave transmission lines, networks and devices] Moscow, Goryachaya liniya–Telekom [Hot line–Telecom], 2016, 472 p. (in Russian).

4. Sharov G.A. *Volnovodnye ustrojstva santimetrovykh i millimetrovykh voln.* [Waveguide devices of the centimeter and millimeter waves]. Moscow, Goryachaya liniya–Telekom Publ., 2016, 640 p. (in Russian).

5. Golubeva N.S., Mitrohin V.N. *Osnovy radioelektroniki sverhvysoykh chastot* [Fundamentals of radio electronics of supersonic frequencies]. Moscow, MGTU im. N.EH.Baumana [MSTU Bauman], 2006, pp. 132–138 (in Russian).

6. Alby M.M. Remote Calibration Using Mobile, Multiagent Technology [Highfrequency Radioelectronics

base]. IEEE Trans. On Instr. And Meas., 2005, vol. 54, no. 1, pp. 24–30.

7. Sand A., Slinde H., Fyeldly T. Secure Approach to Distributed Internet-Enabled Metrology. IEEE Trans. On Instr. And Meas., 2007, vol. 56, no. 5, pp. 1979–1985.

8. Sand A., Stevens M., Parkin G. Internet Enabled Calibration: An Analysis of Different Topologies and a Comparison of Two Different Approaches. – IEEE Trans. Of Instr. And Meas., 2007, vol. 56, no. 5, pp. 1986–1991.

9. Sharov G.A., Kostrikin A.M., Gusinskij A.V. *Matematika radioelektroniki sverhvysoykh chastot (koordinaty, vektory, matricy)* [Microwave Radioelectric Mathematics]. Minsk, Bestprint Publ., 2014, 240 p.

10. Gusinskij A.V., Sharov G.A., Kostrikin A.M. *Vektornye analizatory cepej millimetrovykh voln. Monografiya. V 3 ch. Ch. 1. Osnovnye ponyatiya i predstavleniya teorii preobrazovaniya signalov i spektral'nogo analiza* [Vector Network Analyzer in Millimeter Waves]. Minsk, BGUIR, 2004, 214 p.