

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕКОСТНЫХ ПЕРВИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СРЕДСТВ ЗОНДВОЙ ЭЛЕКТРОМЕТРИИ**

*Тявловский А. К., Гусев О. К., Жарин А. Л.*

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

*Для определения функции преобразования емкостного первичного преобразователя зондового электрометра использован метод комплексно-гармонического анализа. Получено выражение, позволяющее анализировать метрологические характеристики цепи, содержащей динамический конденсатор при любых значениях ее параметров. Проанализированы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики цепи и выработаны рекомендации по использованию различных участков частотной характеристики при проектировании средств измерений на основе динамического конденсатора.*

### **Введение**

Для регистрации поверхностного потенциала диэлектриков, контактной разности потенциалов, напряженности электрического поля часто используется метод динамического конденсатора, называемого также зондом Кельвина. Кроме того, динамический конденсатор присутствует в конструкции таких приборов, как конденсаторные микрофоны, датчики перемещений, микромеханические акселерометры и др. [1]. При проектировании средств измерений, основанных на использовании данного метода, встает задача теоретического определения комплексного коэффициента преобразования входной величины (потенциала, напряженности электрического поля) в выходной переменный сигнал динамического конденсатора. Нелинейный характер дифференциального уравнения, описывающего работу цепи, содержащей динамический конденсатор, делает задачу нахождения данного коэффициента нетривиальной, в связи с чем ее решение в общем виде не было получено вплоть до настоящего времени [2].

Для решения указанной задачи в настоящей работе предлагается использовать метод комплексно-гармонического анализа [3]. С использованием этого метода проведен теоретический анализ входной цепи зондового электрометра, использующего в качестве первичного преобразователя потенциала (контактной разности потенциалов) динамический конденсатор, определен комплексный коэффициент

преобразования разности потенциалов между обкладками динамического конденсатора в выходной переменный сигнал, определено влияние параметров цепи на амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики измерительного преобразователя.

### **Математическое моделирование измерительной цепи зондового электрометра с динамическим конденсатором методом комплексно-гармонического анализа**

Динамический конденсатор представляет собой две обкладки (пластины), разделенные воздушным промежутком, расстояние между которыми меняется по определенному, чаще всего гармоническому, закону. Последний, как правило, реализуется за счет наложения на одну из пластин механической вибрации от внешнего источника колебаний (рисунок 1) [4]. Между обкладками присутствует разность потенциалов, определяемая наличием поверхностного заряда на одной из обкладок (в случае электрометра или конденсаторного микрофона) или разностью работ выхода электронов материалов обкладок (в случае измерителя контактной разности потенциалов).

В эквивалентной схеме эта разность потенциалов имитируется включением последовательно с динамическим конденсатором источника постоянной ЭДС  $U_c$ . Входное сопротивление следующего каскада полагается чисто активным и равным  $R_H$ .

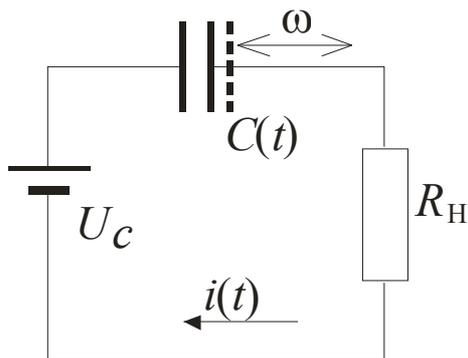


Рисунок 1 – Эквивалентная схема электрической цепи зондового электрометра, содержащей динамический конденсатор

Электрическая емкость плоскопараллельного конденсатора, как известно, определяется выражением:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}, \quad (1)$$

где  $S$  – площадь меньшей из обкладок;  
 $d$  – расстояние между обкладками;  
 $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды; для воздуха  $\epsilon \approx 1$  ;  
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – диэлектрическая постоянная.

При наложении на одну из пластин гармонических колебаний в направлении, перпендикулярном плоскости обкладки, емкость динамического конденсатора будет изменяться по закону:

$$C(t) = \epsilon \epsilon_0 S \frac{1}{d_0 - d_1 \cos \omega t} = C_0 \frac{1}{1 - m \cos \omega t}, \quad (2)$$

где  $C_0$  – статическая емкость динамического конденсатора при нейтральном положении колеблющейся обкладки;

$\omega$  – круговая частота колебаний;

$m = \frac{d_1}{d_0}$  – коэффициент модуляции динамического конденсатора.

Решаемая задача заключается в нахождении функции преобразования разности потенциалов между обкладками  $U_c$  в выходное переменное напряжение  $U(t)$  за счет периодического изменения емкости динамического конденсатора.

Выразим емкость динамического конденсатора  $C(t)$  через статическую емкость  $C_0$  и ее девиацию  $\Delta C(t)$  :

$$C(t) = C_0 + \Delta C(t). \quad (3)$$

Из (2) и (3):

$$\Delta C(t) = \frac{m C_0 \cos \omega t}{1 - m \cos \omega t}. \quad (4)$$

Несложно видеть, что выражение (4) не является чисто гармонической функцией. Его графическое представление для разных значений коэффициента модуляции  $m$  приведено на рисунке 2.

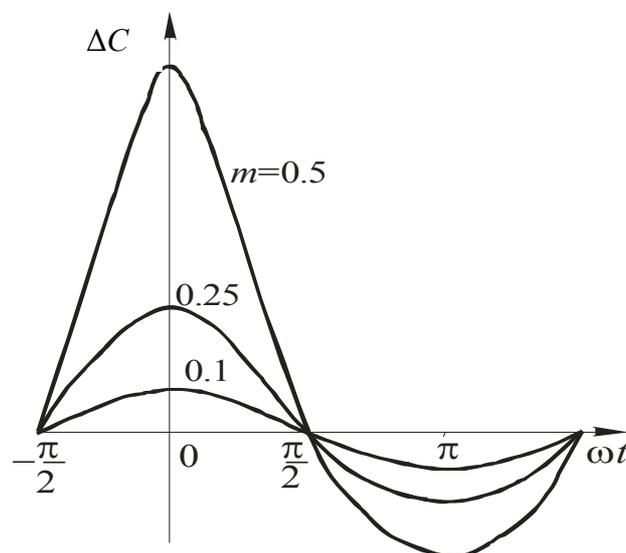


Рисунок 2 – Зависимость девиации емкости динамического конденсатора от фазы колебаний  $\omega t$

Как видно из рисунка 2, график девиации емкости динамического конденсатора становится существенно несимметричным относительно оси абсцисс при увеличении глубины модуляции  $m$ . Таким образом, и емкость  $C(t)$  с изменением расстояния между обкладками изменяется нелинейно, что и определяет сложность анализа цепи, содержащей динамический конденсатор.

В соответствии со вторым правилом Кирхгофа для цепи, показанной на рисунке 1, справедливо равенство:

$$U_c = i(t)R_H + U(t), \quad (5)$$

где  $i(t)$  – сила тока в рассматриваемой цепи.

Равенство (5) можно переписать в дифференциальной форме:

$$\frac{U_c}{R_H} = \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{R_H C(t)}, \quad (6)$$

где  $Q(t)$  – заряд на пластинах динамического конденсатора.

Подстановка  $C(t)$  из (3) и (4) в (6) дает нелинейное дифференциальное уравнение, что означает присутствие в выходном сигнале  $U(t)$  дополнительных гармоник с частотами, кратными частоте вибрации подвижной обкладки динамического конденсатора.

Интегрируя уравнение (6) с помощью интегрирующего множителя  $\mu$ , определяемого выражением:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{R_H C(t)} dt}, \quad (7)$$

можно получить общее решение уравнения (6) в виде:

$$Q(t) = \frac{U C}{R_H} e^{\left(-\frac{t}{R_H C_0} - \frac{m}{\omega R_H R_H C_0} \cos \omega t\right)} \times \int_0^t e^{\left(\frac{t}{R_H C_0} - \frac{m}{\omega R_H R_H C_0} \cos \omega t\right)} dt. \quad (8)$$

Недостатком данного решения является необходимость отыскания интеграла вида  $\int_0^t e^{\left(\frac{t}{R_H C_0} - \frac{m}{\omega R_H R_H C_0} \cos \omega t\right)} dt$ , который не может быть выражен через элементарные функции, что делает найденное решение непригодным для практического использования.

В связи с этим в литературе, как правило, предлагается использовать для расчетов приближенное выражение вида [5]:

$$\frac{U(t)}{U_c} \approx \frac{\Delta C}{C_0} \approx \frac{d_1}{d_0}. \quad (9)$$

Данное приближение справедливо только для случая очень большой постоянной времени входной цепи  $R_H C_0 \geq \frac{2\pi}{\omega}$ , что редко выполняется на практике, а в ряде случаев, например, для конденсаторных микрофонов, является непри-

емлемым допущением. Численное решение уравнения (8) также оказывается возможным только для некоторых частных случаев из-за плохой сходимости получаемых рядов.

В связи с этим решение уравнения (8) предлагается искать методом комплексно-гармонического анализа, впервые предложенного Г.Е. Пуховым [3].

В основе метода лежат преобразования Лапласа и Фурье с конечными пределами, имеющие вид:

$$F_n^* = j \frac{2}{T} \int e^{-jn\omega t} f(t) dt, \quad (10)$$

где  $F_n^*$  – комплексное изображение функции вещественного аргумента  $f(t)$ , характеризующей комплексную амплитуду  $n$ -й гармоники ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $f(t)$  на отрезке  $[0, T]$ ;  $T$  – период изменения функции  $f(t)$ ;  $j$  – мнимая единица.

Обозначим оператор перехода от вещественного оригинала к его комплексному изображению как  $K_n$ , тогда  $F_n^* = K_n[f(t)]$ .

Обратное преобразование (переход от комплексного изображения к вещественному оригиналу) заключается в простом суммировании тригонометрического ряда Фурье по  $F_n^*$ :

$$f(t) = \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega t} = \frac{F_0}{2j} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (11)$$

где  $F_n$  и  $\varphi_n$  – амплитуда и фаза  $n$ -й гармоники функции  $f(t)$ , соответственно:

$$F_n = \sqrt{(\operatorname{Re} F_n^*)^2 + (\operatorname{Im} F_n^*)^2}, \quad (12)$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F_n^*}{\operatorname{Re} F_n^*}, \quad (13)$$

где  $\operatorname{Re} F_n^*$  и  $\operatorname{Im} F_n^*$  – действительная и мнимая части комплексного числа  $F_n^*$ , соответственно.

Применим преобразование (10) к уравнению (6), задавшись в качестве пределов интегрирования периодом изменения емкости динамического конденсатора  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Комплексное изображение функции  $Q(t)$  имеет вид  $K_n[Q(t)] = Q_n^*$  [3]. Тогда комплексное изображение производной от этой функции  $\frac{dQ(t)}{dt}$  будет:

$$K_n \left[ \frac{Q(t)}{dt} \right] = jn\omega Q_n^* \quad (14)$$

Используя правило умножения оригинала на константу [3], получим:

$$K_n \left[ \frac{1}{R_H} \frac{Q(t)}{C(t)} \right] = \frac{1}{R_H} K_n \left[ \frac{Q(t)}{C(t)} \right], \quad (15)$$

$$K_n \left[ \frac{U_C}{R_H} \right] = \frac{U_C}{R_H} K_n[1], \quad (16)$$

где  $K_n[1]$  – комплексное изображение единичной функции, равно:

$$K_n[1] = \begin{cases} j2, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad (17)$$

Обозначим  $\frac{1}{C(t)} = N$ . Тогда:

$$K_n \left[ \frac{1}{C(t)} \right] = K_n[N] = N_n^* \quad (18)$$

Используя формулу для изображения произведения двух функций [3], можно записать:

$$K_n \left[ \frac{1}{C(t)} Q(t) \right] = \frac{1}{j^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} N_{n-v}^* Q_v^* = \frac{1}{j^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} N_v^* Q_{n-v}^* \quad (19)$$

Таким образом, с учетом (14), (15) и (19) комплексное изображение уравнения (6) можно представить в виде системы алгебраических уравнений:

$$jn\omega Q_n^* + \frac{1}{j2R_H} \sum_{v=-\infty}^{\infty} N_v^* Q_{n-v}^* = \frac{U_C}{R_H} K_n[1] \quad (20)$$

Подставляя (2) в (19) и применяя преобразование (10), получим:

$$N_n^* = \begin{cases} \frac{j^2}{C_0}, v=0 \\ -\frac{jm}{C_0}, v=0 \\ 0, v \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Подставляя (17) и (21) в (20) и используя свойство  $Q_{-n}^* = -Q_n^*$  [3], получим:

$$Q_0^* = \frac{j^2 U_C C_0}{1 - \frac{m Q_1^* - \hat{Q}_1}{2 Q_0^*}}, \quad (22)$$

$$Q_n^* = \frac{m Q_{n-1}^* + Q_{n+1}^*}{2 jn\omega R_H C_0 + 1},$$

где  $\hat{Q}_1$  – число, комплексно сопряженное  $Q_n$ .

Решение системы уравнений (22), с учетом (11)–(13), может быть найдено в виде суммы гармоник:

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + Q_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \dots + Q_n \sin(\omega t + \varphi_n) + \dots \quad (23)$$

Выражение (23) содержит бесконечное количество слагаемых, поэтому для его практического использования необходимо оборвать ряд, задавшись максимальным номером  $n$  значащей гармоники.

Чтобы найти отклик измерительной системы, содержащей динамический конденсатор, необходимо проинтегрировать уравнение (23) по времени, что даст силу тока в цепи, и умножить результат на  $R_H$  в соответствии с законом Ома для участка цепи. Тогда искомым коэффициент преобразования  $A = \frac{U(t)}{U_C}$  разно-

сти потенциалов между обкладками  $U_C$  в выходное переменное напряжение  $U(t)$  может быть выражен в виде:

$$A = \frac{U(t)}{U_C} = \frac{Q_1 \omega R_H}{U_C} \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{2Q_2 \omega R_H}{U_C} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{nQ_n \omega R_H}{U_C} \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (24)$$

Таким образом, применение комплексно-гармонического метода к анализу цепи, содержащей динамический конденсатор, позволило найти функцию преобразования емкостного первичного преобразователя зондового электрометра в виде суммы гармоник, причем система уравнений (22) разрешима для любых значений параметров анализируемой цепи.

**Анализ амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик емкостного первичного преобразователя зондового электрометра**

С практической точки зрения наибольший интерес представляет использование уравнений (22) и (24) для оптимизации параметров измерительной цепи, а именно емкости динамического конденсатора  $C_0$ , сопротивления нагрузки  $R_H$ , частоты вибрации подвижной обкладки  $\omega$ , а также глубины модуляции  $m$ . Соответствующее компьютерное моделирование для различных номеров гармоник было проведено с помощью математического пакета MathCAD. Результаты моделирования приведены на рисунке 3 в виде графиков в логарифмических координатах.

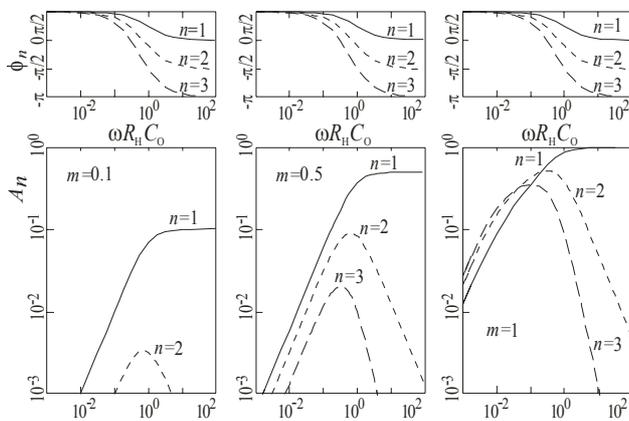


Рисунок 3 – Зависимости нормированных амплитуды и фазы выходного сигнала электрической цепи, содержащей динамический конденсатор, от нормированной частоты  $\omega R_H C_0$  для различных значений коэффициента модуляции:  $n$  – номер гармоники;  $m$  – коэффициент модуляции

По результатам моделирования на полученных зависимостях можно выделить три характерных участка:

**Участок 1:**  $\omega R_H C_0 \leq 0,1$ . При малых значениях нормированной частоты фазы трех первых гармоник сигнала практически постоянны и равны  $\varphi_n \approx \pi/2$ , а нормированные значения амплитуд гармоник монотонно возрастают с увеличением частоты. На этом участке эффективно проявляются высшие гармоники сигнала, что приводит к большому коэффициенту гармонических искажений (коэффициенту гармоник), т.е. цепь характеризуется существенной нелинейностью. В то же время данный участок

может использоваться в случае построения измерительной системы, работающей на высших гармониках сигнала. Так, работа измерителей контактной разности потенциалов зачастую связана с присутствием помехи (наводки) на частоте вибрации подвижной обкладки. В этом случае использование первого участка частотной характеристики позволяет применить для подавления помехи режекторный фильтр, настроенный на основную гармонику сигнала, а измерения проводить на второй или более высоких гармониках, имеющих на этом участке значительную амплитуду.

**Участок 2:**  $0,1 \leq \omega R_H C_0 \leq 10$ . Этот участок является переходным, характеризующимся непрерывным изменением фаз всех гармоник сигнала. Графики нормированных амплитуд на этом участке претерпевают перегиб, причем амплитуда первой гармоники переходит к горизонтальному участку, тогда как для второй и третьей гармоник в пределах участка 2 наблюдается максимум с последующим спадом. Вследствие большой нелинейности и нестабильности амплитуды и фазы сигнала от частоты использовать этот участок для выполнения измерений нежелательно.

**Участок 3:**  $\omega R_H C_0 \geq 10$ . При больших значениях нормированной частоты превалирующей становится первая гармоника сигнала, нормированная амплитуда которой с изменением частоты практически не меняется. Сдвиг фазы этой гармоники также остается постоянным,  $\varphi_1 \approx 0$ . Амплитуды высших гармоник с ростом частоты уменьшаются, причем спад тем резче, чем выше номер гармоники. Их сдвиги фаз различны, однако практически постоянны в пределах участка:  $\varphi_2 \approx -\pi/4$ ,  $\varphi_3 \approx -3\pi/4$ . Таким

образом, в пределах этого участка наиболее целесообразно использовать для анализа сигнала его первую гармонику, причем с ростом нормированной частоты коэффициент гармонических искажений будет уменьшаться.

Из графиков рисунка 3 видно, что с ростом коэффициента модуляции амплитуда выходного сигнала динамического конденсатора увеличивается. При этом амплитуда высших гармоник растет опережающими темпами, и при  $m \rightarrow 1$  амплитуда не только второй, но также и третьей гармоники превышает амплитуду первой гармоники на участке 1. Этот факт также может быть использован при построении измерительной системы, работающей на высших

гармониках сигнала, однако при этом следует учитывать, что сильная зависимость выходного сигнала от коэффициента модуляции при больших  $m$  может служить источником дополнительной погрешности.

### **Заключение**

1. Методом комплексно-гармонического анализа определена функция преобразования емкостного первичного преобразователя зондового электрометра. Полученные выражения пригодны для определения метрологических характеристик средств измерений, содержащих динамический конденсатор в измерительной цепи. Система уравнений для расчета амплитуд и фазовых сдвигов гармонических составляющих функции преобразования разрешима при любых значениях параметров измерительной цепи.

2. В результате компьютерного моделирования динамических характеристик измерительной цепи зондового электрометра получены зависимости нормированных амплитуд и фаз гармоник выходного сигнала динамического конденсатора от нормированной частоты  $\omega R_H C_0$ , которые характеризуются тремя четко выраженными участками. В области малых значений нормированной частоты наблюдается рост амплитуд всех гармонических составляющих с увеличением частоты. В области больших значений нормированной частоты амплитуда первой гармоники остается постоянной, тогда как амплитуды второй и более высоких гармоник уменьшаются с ростом частоты.

3. По результатам моделирования определены рекомендации по улучшению метрологических характеристик зондовых электрометров на основе динамического конденсатора. Показано, что первый участок амплитудно-частотной (фазочастотной) характеристики может использоваться при построении измерительной системы, работающей на второй или более высоких гармониках сигнала (например, с целью подавления помехи на первой гармонике). Использование третьего участка амплитудно-частотной (фазочастотной) характеристики обеспечивает меньшие значения коэффициента гармонических искажений.

### **Список использованных источников:**

1. *Lonardo, P. M.* Emerging Trends in Surface Metrology / P. M. Lonardo, D. A. [et al.] // CIRP Annals - Manufacturing Technology. – 2002. – № 51(2). – P. 701–723.
2. *Booth, J. E.* Scuffing detection of TU3 cam-follower contacts by electrostatic charge condition monitoring / J. E. Booth [et al.] // Tribology International. – 2010. – № 43. – P. 113–128.
3. *Пухов, Г. Е.* Комплексное исчисление и его применение / Г. Е. Пухов. – К. : Из-во АН УССР, 1961. – 220 с.
4. *Zharin, A. L.* Contact Potential Difference Techniques as Probing Tools in Tribology and Surface Mapping / A. L. Zharin // Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology (edited by B. Bhushan). – Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. – P. 687–720.
5. *Taylor, D. M.* Measuring techniques for electrostatics / D. M. Taylor // Journal of Electrostatics. – 2001. – № 51–52. – P. 502–508.

---

Tyavlovsky A. K., Gusev O. K., Zharin A. L.

### **Metrological performance modeling of probe electrometers capacitive sensors**

A transducer function of probe electrometer's primary capacitive sensor was calculated using a harmonic complex analysis technique. The obtained expression allows analyzing metrological characteristics of the circuit containing the dynamic capacitor at any values of its parameters. Study of circuit's peak-frequency and phase-frequency characteristics was held giving recommendations on using of different parts of frequency characteristic when designing measuring systems on a basis of dynamic capacitor.

*Поступила в редакцию 08.04.2011.*