

## **АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ И МИНИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТОВ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА КАЧЕНИЯ МАЯТНИКА С ДВУМЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ОПОРАМИ В РЕЖИМЕ МАЛЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ**

*Джилавдари И.З.<sup>1</sup>, Мекид С.<sup>2</sup>, Ризноокая Н.Н.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Университет нефти и полезных ископаемых короля Фадха, Дхахран, Саудовская Аравия

*Рассматривается динамика свободных качаний физического маятника, опирающегося двумя шариками на плоское основание, в режиме предварительных смещений, когда амплитуда колебаний существенно меньше угла упругого контакта. Проводится анализ основных механизмов, приводящих к микропроскальзыванию шариков на опорной поверхности. Получены условия, при которых как сами микропроскальзывания, так и их влияние на свободные колебания маятника сводятся к минимуму, что позволяет реализовать условие «чистого» качения сферических опор и существенно увеличить точность маятниковых средств измерений. (E-mail: RiznookayaN@yandex.ru)*

**Ключевые слова:** трение качения, предварительное смещение при качении, проскальзывание, вибрации основания, балансировка физического маятника.

### **Введение**

С развитием современного приборостроения остро встала проблема точного позиционирования элементов приборов [1–3]. Эта проблема особенно актуальна в таких областях науки и техники, как управление телескопами, робототехника, управление оружием, технология производства интегральных схем, туннельные и силовые зондовые микроскопы.

Основным фактором, ограничивающим точность систем позиционирования, является трение, в первую очередь его гистерезисный характер в области малых перемещений при начале движения и в точках реверса [4, 5]. Увеличение точности этих систем возможно при уменьшении трения. Поэтому здесь часто используют элементы качения, так как сопротивление качению, как правило, гораздо меньше сопротивления скольжению [1].

Перемещения при качении считаются малыми, если тело смещается на расстояние, которое не превосходит размеров пятна контакта взаимодействующих тел. В русскоязычной литературе такие смещения называют предварительным смещением при качении, в англоязычной литературе – «pre-rolling».

Установлено, что трение качения обусловлено тремя причинами: несовершенством упругости, адгезией и взаимным проскальзыванием контактирующих тел. Считается, что проскальзывание – один из основных механизмов диссипации энергии в процессах качения при малых нагрузках. Особо тонкой проблемой является изучение микропроскальзываний, при которых только отдельные участки тела качения проскальзывают относительно опорной поверхности, в то время как другие его участки не испытывают скольжения. В настоящее время рассматривают три вида такого микропроскальзывания [6–8]:

1) «проскальзывание по Хизкоуту», или дифференциальное проскальзывание, причиной которого является различная геометрия контактирующих тел;

2) «проскальзывание по Рейнольдсу», или продольное проскальзывание, причиной которого является различие упругости контактирующих тел;

3) проскальзывание, возникающее под действием тангенциальной силы, действующей на катящееся тело, величина которой меньше максимальной силы трения покоя.

В литературе, посвященной исследованию трения качения в случаях контакта твердых тел,

как правило, рассматривают процессы стационарного качения. В этом случае считают, что силы трения, обусловленные проскальзыванием по Рейнольдсу, практически всегда малы [6, 7]. Также считают, что силы трения, обусловленные проскальзыванием по Хизкоуту, могут быть значительными лишь в случае качения тел по желобу с V-образным поперечным сечением.

При качении по твердому плоскому основанию в режиме «pre-rolling» силы трения качения крайне малы [9]. Поэтому при измерении этого трения анализ факторов, связанных с микропроскальзыванием, оказывается необходимым.

Наиболее чувствительным экспериментальным методом исследования трения качения является маятниковый метод. Этот метод основан на свободных качаниях физического маятника, опирающегося двумя шариками на несущее основание (рисунок 1).

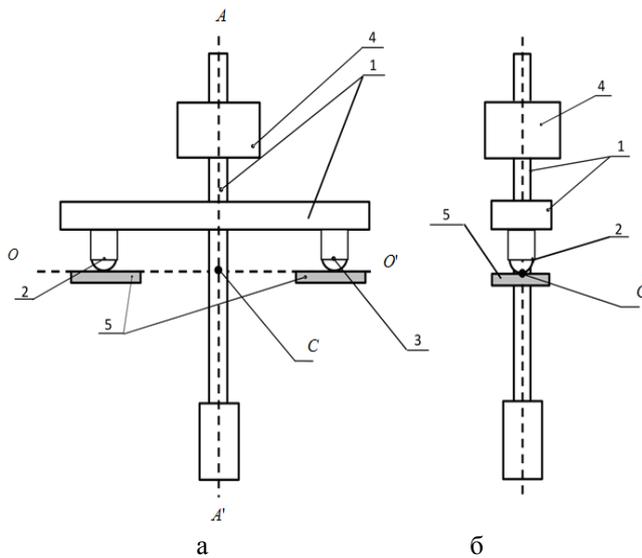


Рисунок 1 – Физический маятник с двумя сферическими опорами: а – вид спереди; б – вид сбоку; 1 – стержень и планка; 2, 3 – сферические опоры маятника; 4 – балансирующий груз; 5 – внешнее основание; AA' – геометрическая ось симметрии маятника; C – центр масс маятника; OO' – линия касания шариков и основания (мгновенная ось вращения маятника)

В литературе, посвященной исследованию трения качения маятниковым методом, считают, что при свободных качаниях маятника, когда опоры маятника и несущее основание представляют собой одинаковые сферы, про-

скальзывание отсутствуют в принципе. Поэтому такая конструкция пользовалась популярностью при анализе механизмов трения качения [6, 9, 10].

Теоретические исследования эффектов проскальзывания в процессах нестационарного качения сложны. В монографии К. Джонсона, одного из классиков теории контактного взаимодействия, отмечается, что рассмотрение таких эффектов представляет собой до конца не решенную проблему [8]. Анализ процессов «pre-rolling» связан именно с этой проблемой.

Целью данной статьи является оценка моментов и сил трения качения, действующих на маятник и обусловленных силами трения, возникающих при всех трех механизмах проскальзывания при качении опорных шариков по плоскому основанию в условиях самого начала процесса «pre-rolling». В случае эффектов Рейнольдса и Хизкоута используются результаты, полученные в работе [8] для стационарного качения этих шариков. В случае действия внешней тангенциальной силы рассматривается малая осциллирующая сила, которая не может вызвать скольжение маятника как целого. Отдельное внимание уделяется решению проблемы снижения влияния вибраций основания на свободные качания маятника. Предполагается, что анализ этих проблем позволит найти и реализовать условия качаний опорных шариков маятника, близкие к условиям «чистого качения», которые обеспечивают минимум трения качения, связанного с микропроскальзываниями и влиянием вибраций опорной поверхности.

### Анализ проскальзывания по Рейнольдсу

В процессе стационарного качения шариков теоретический анализ этого эффекта выполнил К. Джонсон [8]. Он получил параметр  $\xi$ , определяющий относительную разность деформаций контактирующих тел, который зависит от свойств материалов этих тел и определяет вклад проскальзывания в сопротивление качению. В частности, при стационарном качении шара радиусом  $R$  по плоскости параметр  $\xi$  равен отношению пути проскальзывания к пройденному пути, и этот параметр можно рассчитать по формуле [8]:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\beta \cdot a}{\pi \cdot R},$$

где  $a$  – радиус пятна контакта, определяемый формулой Герца;  $\beta$  – мера различия упругих постоянных материалов.

$$\beta = \frac{[(1-2\nu_1)/G_1] - [(1-2\nu_2)/G_2]}{[(1-\nu_1)/G_1] + [(1-\nu_2)/G_2]},$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига.

На рисунке 2 представлен график зависимости коэффициента сопротивления качению, выраженный в виде безразмерного параметра  $Y$ , от параметра  $\beta/\mu$  [7], где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, причем:

$$Y = \frac{F_R}{P} \frac{R_{np}}{\beta \cdot a} 10^4, \quad (1)$$

где  $F_R$  – сила трения качения;  $P$  – вертикальная нагрузка на шарик;  $R_{np}$  – приведенный радиус.

Проведем оценку момента силы трения, действующего на маятник относительно его центра масс, когда смещение шара существенно меньше радиуса контакта. Очевидно, что в этом случае проскальзывание должно уменьшаться с уменьшением перемещения. Поэтому в формуле (1) заменим значение радиуса контакта  $a$  на величину смещения шарика  $R\varphi$ , где  $\varphi$  – угол поворота шарика или угол отклонения маятника от положения равновесия. Значение параметра  $\beta/\mu$  при этом не изменится и, следовательно, значение параметра  $Y$  также сохранится и может быть рассчитано из графика на рисунке 2 для конкретной пары трения. Далее для расчета максимальной силы трения  $F_R$  в условиях качаний маятника, заменим угол  $\varphi$  на максимальный угол отклонения маятника  $\alpha$ . Учитывая, что  $\alpha \ll 1$ , найдем, что плечо силы трения  $F_R$  дается формулой:

$$h = (l_c - R) - \frac{1}{2} \alpha^2, \quad (2)$$

где  $l_c$  – расстояние от центра шарика до центра масс маятника. Тогда из формулы (1) при фиксированном значении  $Y$  получим формулу для расчета момента трения качения относительно центра масс маятника, обусловленного трением по Рейнольдсу:

$$\begin{aligned} |M_R| &= M_{1R} = F_R \cdot h = \\ &= 10^{-4} \beta P Y \alpha \left[ (l_c - R) - \frac{1}{2} l_c \alpha^2 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

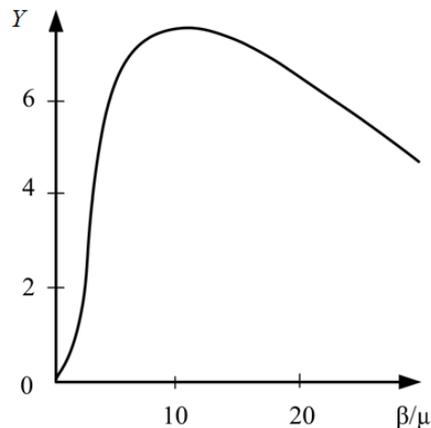


Рисунок 2 – График для расчета сопротивления качению за счет проскальзывания по Рейнольдсу [7]

### Анализ проскальзывания по Хизкоуту

Проведем оценку сопротивления качению, обусловленного проскальзыванием по Хизкоуту. Из расчетов, приведенных в работе [8], следует, что при стационарном качении сила трения  $F_H$ , действующая на шарик, связанная с параметрами, характеризующими упругость контактирующих тел, имеет вид, показанный на рисунке 3 [7], где безразмерные параметры  $V$  и  $X$  даются формулами:

$$\begin{aligned} V &= \frac{F_H}{\mu P} \frac{R^2}{a^2}, \\ X &= \frac{\pi}{\mu p_0 \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \frac{a^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $p_0$  – давление в центре площадки контакта, которое рассчитывается по известной формуле Герца [8].

Будем считать, что максимальное смещение шарика  $R\varphi = R\alpha \ll a$ . Воспользовавшись первой из формул (4) и учитывая (2), найдем, что момент трения качения, действующий на маятник относительно его центра масс:

$$M_H = M_{1H} \approx V \mu P \alpha^2 \left[ (l_c - R) - \frac{1}{2} l_c \alpha^2 \right]. \quad (5)$$

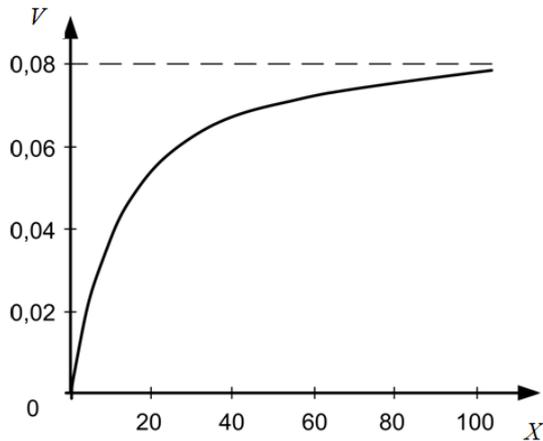


Рисунок 3 – График для расчета сопротивления качению за счет проскальзывания по Хизкоуту [7]

Введем безразмерный параметр  $\delta$ , характеризующий положение центра масс маятника относительно поверхности шариков, в соответствии с формулой:

$$l_c - R = R\delta. \quad (6)$$

Учитывая, что амплитуда  $\alpha \ll 1$ , с погрешностью до  $\alpha^2$  из предыдущих формул найдем:

$$\begin{aligned} M_{IR} &= F_R \cdot h = 10^{-4} \beta P Y \delta R \alpha, \\ M_{IH} &\approx V \mu P R \delta \alpha^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что моменты трения  $M_R$  и  $M_H$  уменьшаются с уменьшением амплитуды колебаний и с приближением центра масс маятника к поверхности шариков. В последнем случае  $\delta = 0$ , если выполнено условие:

$$l_c = R. \quad (8)$$

Это условие означает, что когда маятник занимает вертикальное положение, центр масс маятника находится на пятне контакта опорного шарика и несущей поверхности. Выполнение условия (8) требует специальной балансировки маятника. Однако на практике строго выполнить это условие нельзя. Если  $R = 5$  мм, по-видимому, можно ожидать, что можно реализовать значение  $\delta = 0,01$ .

Проведем далее численную оценку потерь энергии на трение, связанного с микроскольжениями Рейнольдса и Хизкоута для сферических

опор, выполненных из корунда (радиус шариков  $R = 5$  мм,  $\nu = 0,22$  и  $E = 3,1 \cdot 10^{11}$  Па), опирающихся на две одинаковые пластины, выполненные из монокристалла кремния с ориентацией оси  $\langle 111 \rangle$  ( $\nu = 0,27$  и  $E = 1,9 \cdot 10^{11}$  Па). Масса маятника  $m = 1,25$  кг, начальный угол отклонения маятника  $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$  рад. Для данной пары трения коэффициент трения скольжения  $\mu = 0,18$  и коэффициент  $\beta = 0,11$ ; угол упругого контакта  $\alpha_0 \approx 0,011$  рад. В этом случае  $\beta/\mu = 0,6$  и в соответствии с рисунком 2 параметр  $Y \approx 0,3$ . В свою очередь, параметр  $X = 8,9 \cdot 10^4 \gg 1$  и в соответствии с рисунком 3 параметр  $V \approx 0,08$ . Потери энергии за один цикл колебаний найдем, интегрируя формулы (7) в интервале от 0 до  $\alpha$  и умножая на 4 (учитывая весь путь, пройденный маятником). При  $\delta = 0,01$  имеем  $\Delta W_R \approx 6,05 \cdot 10^{-13}$  Дж и  $\Delta W_H \approx 2,46 \cdot 10^{-12}$  Дж. Полная энергия потерь энергии от проскальзываний по Рейнольдсу и по Хизкоуту  $\Delta W = 3,065 \cdot 10^{-12}$  Дж.

В случае несбалансированного маятника, например при  $\delta = 10$ , эта величина возрастет более, чем в  $10^3$  (тогда  $\Delta W \approx 3,065 \cdot 10^{-9}$  Дж). Следует отметить, что на опыте потери энергии, которые связаны с несовершенством упругости кремния и адгезией (которые считают основными механизмами трения качения [6]), в пределах одного периода колебаний при той же амплитуде составили  $\Delta W_M = 3,3 \cdot 10^{-10}$  Дж [11]. Следовательно, если маятник несбалансирован, то погрешность измерения трения качения маятниковым методом может быть недопустимо большой.

### Тангенциальные силы, действующие на маятник в процессе свободных качаний

При колебаниях физического маятника его центр масс совершает ускоренное движение. Это ускорение всегда имеет тангенциальную составляющую. Единственной силой, которая может обеспечить наличие этого ускорения, является сила трения покоя  $F_{тр}$ , действующая на шарики по касательной вдоль поверхности.

Данная сила может появиться только при наличии проскальзывания маятника на опорной поверхности в виде эффекта предварительного смещения при скольжении. Отсюда следует, что в известных опытах Дж. А. Томлинсона [10] и Д. Тэйбора [6], когда маятник опирался своими шариками на такие же шарики,

избежать эффекта проскальзывания было невозможно. Этот механизм проскальзывания опоры в маятниковом методе измерения трения качения в литературе ранее не рассматривался.

Найдем выражение для силы трения скольжения  $F_{тр}$ , действующей на шарики в маятнике, совершающем свободные колебания, способной удерживать шарики от скольжения (рисунок 4).

Эта сила равна произведению массы маятника на проекцию ускорения его центра масс  $a_{cx}$  на горизонтальное направление:

$$F_{тр} = m \cdot a_{cx} = m \cdot [(l_c \cos(\varphi) - R) \cdot \ddot{\varphi} - l_c \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2] \quad (9)$$

где  $l_c$  – расстояние от центра масс маятника до центра шарика.

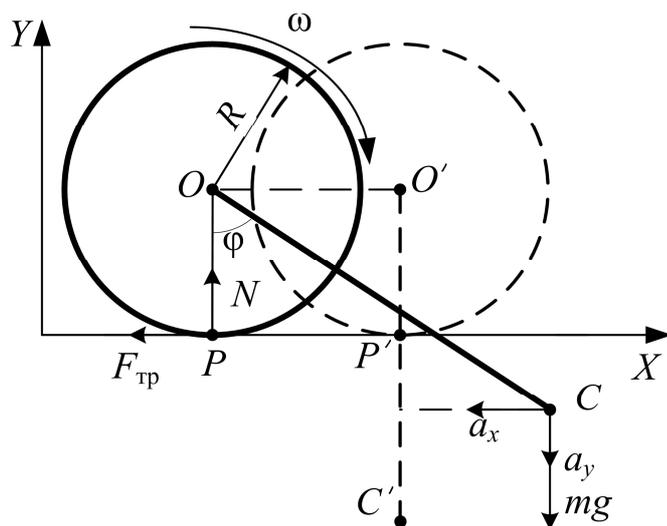


Рисунок 4 – Движение маятника вместе с опорой качения при отсутствии скольжения: - - - маятник в состоянии покоя; — маятник, совершающий свободные затухающие колебания;  $R$  – радиус шара;  $O, O'$  – положение центра шара;  $N$  – сила реакции опоры;  $F_{тр}$  – сила трения;  $mg$  – сила тяжести;  $C, C'$  – положение центра масс маятника;  $a_x$  – горизонтальная составляющая ускорения центра масс маятника;  $a_y$  – вертикальная составляющая центра масс маятника;  $P, P'$  – точка касания шара и внешнего основания;  $\omega$  – угловая скорость маятника;  $\varphi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия

При качаниях маятника на пятне контакта амплитуда колебаний  $\alpha \ll 1$ . В свою очередь, при малом трении качения колебания маятника

в каждом цикле колебаний близки к гармоническим, так что в каждом цикле можно считать:

$$\varphi(t) \approx \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (10)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ , и  $T$  – период колебаний маятника.

Из формулы (9) следует, что сила  $F_{тр}$  зависит от соотношения между параметрами  $l_c$  и  $R$ , с одной стороны, и амплитуды колебаний, с другой стороны. Покажем, что условие (8) является условием минимума силы  $F_{тр}$ .

Подставим формулу (10) в формулу (9) и учтем соотношение (7). Считая далее, что амплитуда угла отклонения маятника  $\alpha \ll 1$ , сохраняя наиболее характерные члены, найдем искомую силу в виде:

$$F_{тр} \approx m\delta R\omega^2 \alpha \cos \omega t. \quad (11)$$

Из (11) следует, что сила  $F_{тр}$  стремится к нулю при уменьшении амплитуды колебаний маятника. Как это показано выше для случая действия моментов трения, связанных с вращением маятника и действием сил трения, обусловленных микропроскальзываниями по Рейнольдсу и Хизкоуту,  $F_{тр} = 0$  при  $\delta = 0$ . Однако, если балансировка маятника нарушена, то действие силы  $F_{тр}$  может вызывать как микроскольжения (при  $F_{тр} < \mu P$ ), так и скольжение маятника как целого (при  $F_{тр} > \mu P$ ).

#### Анализ влияния вибраций основания

Рассматривая действие линейных вибраций основания на колебания физического маятника с опорой на два шарика, будем различать горизонтальные и вертикальные вибрации.

Действие горизонтальных вибраций, перпендикулярных мгновенной оси вращения, аналогично действию ускорения центра масс маятника, рассмотренного выше. Для того чтобы учесть их влияние, достаточно в уравнение для силы трения (9) добавить горизонтальную составляющую вибраций:

$$F_{тр} = m \cdot (a_{cx} + a_{виб,x}).$$

Очевидно, что влияние этого ускорения будет уменьшаться при  $\delta$ , стремящемся к нулю.

Рассматривая вертикальные вибрации основания, будем считать, что они описываются соотношением:

$$y = y_0 f(\Omega t),$$

где  $y_0$  – амплитуда;  $f(\Omega t)$  – случайная функция, занимающая узкий частотный интервал вблизи частоты  $\Omega \gg \omega_0 = 2\pi/T$ . Тогда вертикальные ускорения основания будут описываться соотношением:

$$a_y \approx \Omega^2 y_0 f(\Omega t).$$

В этом случае уравнение колебаний маятника принимает вид уравнения параметрических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mR}{I_c} g \left( 1 + \frac{A}{g} f(\Omega t) \right) \varphi = 0,$$

где  $A = y_0 \Omega^2 \sin \alpha$  – амплитуда параметрического возбуждения;  $\alpha$  – амплитуда свободных колебаний маятника при отсутствии вибраций основания.

Полагая, что в данном случае параметрический резонанс отсутствует, в первом приближении можно найти, что колебания маятника, обусловленные влиянием ускорения основания, которые представляют собой вынужденные параметрические колебания, будут описываться уравнением:

$$\varphi_2(t) \approx \frac{4\pi^2 y_0}{gT^2} \alpha^2 \sin \Omega t = \theta \sin \Omega t,$$

где:

$$\theta = \frac{4\pi^2 y_0}{gT^2} \alpha^2 \quad (12)$$

и  $\alpha \ll 1$  представляет собой амплитуду свободных колебаний маятника на спокойном основании.

Из (12) следует, что вынужденные параметрические колебания существенно меньше свободных колебаний маятника, т.е.  $\theta \leq 10^{-3} \alpha$ , если выполняется условие:

$$y_0 \leq 10^{-3} \frac{gT^2}{4\pi^2 \alpha}.$$

В частности, при  $T \approx 2$  с найдем, что  $y_0 < 0,1$  м, если  $\alpha < 30$  угл. мин. Это условие будет

всегда выполняться на обычном стабильном основании.

### Заключение

1. При малых амплитудах качаний физического маятника с опорой на два шарика моменты трения качения, связанные с основными механизмами микроскольжения, становятся пренебрежимо малыми, если маятник сбалансирован так, что центр тяжести маятника находится на пятне контакта. В этих условиях процесс качения шариков отвечает режиму «чистого качения».

2. Режим «чистого качения» позволяет обеспечить максимальную точность и чувствительность маятниковых средств измерения параметров трения качения. Кроме того, минимизация трения качения может позволить существенно увеличить точность систем позиционирования, в состав которых входят элементы качения.

3. Сбалансированный указанным способом маятник практически не подвержен действию ни горизонтальных, ни вертикальных вибраций. Такой маятник можно называть «невозмущаемым».

4. Если балансировка маятника нарушена, то проскальзывание шариков всегда будет присутствовать, даже в условиях качения шариков по таким же шарикам, когда проскальзывания по Рейнольдсу и Хизкоуту отсутствуют в принципе. В этих условиях доминирующим является трение, связанное с действием тангенциальной составляющей ускорения центра масс маятника.

### Список использованных источников

1. *Mekid, S.* A non-linear model for pre-rolling friction force in precision positioning / S. Mekid // Proc. Instn Mech. Engrs Part J: J. Engineering Tribology. – 2004. – Vol. 218 – P. 305–311.
2. *Tan, X.* Measurement and modeling of dynamic rolling friction in linear microball bearings / X. Tan, A. Modafe, R. Ghodssi // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2006. – Vol. 128. – P. 891–898.
3. *Amthor, A.* High precision position control using and adaptive friction compensation approach / A. Amthor, S. Zschaeck, C. Ament // IEEE Transactions on automatic control. – 2010. – Vol. 55, № 1. – P. 274–278.
4. *Symens, W.* Dynamic characterization of hysteresis elements in mechanical systems. II. Ex-

- perimental validation / W. Symens, F. AlBender // Chaos. – 2005. – Vol. 15, № 1. – P. 1–9.
5. AlBender, F. A model of the transient behavior of tractive rolling contacts / F. AlBender, K. De Moerlooze // Advances in tribology. – 2008. – Vol. 2008. – Art.ID 214894. – P. 1–17.
  6. Боуден, Ф.П. Трение и смазка твердых тел / Ф.П. Боуден, Д. Тэйбор; под ред. И.В. Крагельского. – М. : Машиностроение, 1968. – 543 с.
  7. Крагельский, И.В. Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с.
  9. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
  10. Джилавдари, И.З. Об измерении малых моментов трения качения маятниковым методом / И.З. Джилавдари, Н.Н. Ризноокая // Метрология и приборостроение. – 2011. – № 1. – С. 29–32.
  11. Пинегин, С.В. Трение качения в машинах и приборах / С.В. Пинегин. – М. : Машиностроение, 1976. – 312 с.
  12. Джилавдари, И.З. О влиянии адгезии на период свободных микрокачаний маятника / И.З. Джилавдари, А.В. Пилипенко, Н.Н. Ризноокая // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2008. – № 4. – С. 77–83.

---

Gilavdary I.Z., Mekid S., Riznookaya N.N.

### **Analysis of the effects and minimization of slipping of the pendulum supported by two balls on a flat base in pre-rolling**

The dynamic of free swings of the physical pendulum supported on flat surface by two balls in the process of pre-rolling is examined. The analysis of the main mechanisms which cause the micro-slips of these balls is conducted. The conditions which eliminate the influences of these slipping on this pendulum are received. (E-mail: RiznookayaN@yandex.ru)

**Key words:** micro-slipping, rolling friction, pre-rolling resistance, balance of the physical pendulum, vibrations of bases.

*Поступила в редакцию 19.01.2012.*